Devoir surveillé n°9

03/04/24 – 2h – calculatrices autorisées

La rédaction et le soin seront pris en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 — 5 points

Soient $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{(x, y, z) \in E \mid x + y + z = 0\right\}$ et $v = (1, 1, 1)$.

1. Justifier brièvement que F est un sous-espace vectoriel de E. Écrire F sous la forme $F = \mathrm{Vect}(\dots)$, puis déterminer sa dimension.
2. On pose $G = \mathrm{Vect}(v)$.
   (a) Déterminer $F \cap G$.
   (b) Prouver que $E = F \oplus G$.

Exercice 2 — 4 points

Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires, indiscernables au toucher. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

On considère les événements :

- A_i : « la i-ème boule tirée est blanche » (pour $i = 1, 2, 3$) ;
- N : « la 1re boule tirée est noire » ;
- B : « on a tiré au moins une boule noire ».

1. Calculer $P(A_1)$, $P_{A_1}(A_2)$ et $P_{A_1 \cap A_2}(A_3)$.
2. En déduire que $P(B) = \frac{8}{15}$.
3. Sachant qu'au moins une boule noire figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?

Exercice 3 2,5 points

Soit $x > 0$.

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f : t \mapsto \arctan t$ sur l'intervalle $[0, x]$, prouver que

$$\frac{x}{x^2+1} \leq \arctan x \leq x.$$

Exercice 4 2,5 points

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Calculer la dérivée n-ième de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}.$$

Exercice 5 5 points

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto 1 - x^2$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. En déduire le domaine de dérivabilité de f.
2. Prouver que pour tout nombre x dans ce domaine :

$$f'(x) = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}.$$

3. En déduire une expression simple de $f(x)$ suivant que $0 \leq x \leq 1$ ou que $-1 \leq x \leq 0$.
4. Tracer la courbe représentative de f.