Devoir surveillé n°8

11/03/24 – 4h – calculatrices interdites

La rédaction et le soin seront pris en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 4 points

Partie I

On pose $g : x \mapsto 1 - x - \ln x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g. La fonction g est-elle continue sur cet ensemble?
2. Dresser le tableau de variations de g.
3. Vérifier que g s'annule une et une seule fois sur son ensemble de définition.
4. Calculer $g(1)$.

Partie II

On pose $f : x \mapsto \frac{\ln x}{1-x-\ln x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. Est-elle continue sur cet ensemble?
2. En effectuant un changement de variables et en utilisant une limite de référence, prouver que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = -1$.
   La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1?

Exercice 2 2 points

Déterminer un équivalent simple de chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - x$ en $+\infty$.
2. $g : x \mapsto \cos\left(x^2\right)$ en 0.
3. $h : x \mapsto \ln(\sin x)$ à droite en 0.

Exercice 3 — 1,5 points

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. On pose $g(x) = x - f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

1. Déterminer le signe de chacun des deux nombres $g(0)$ et $g(1)$.
2. Prouver que l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution dans $[0,1]$.

Exercice 4 — 3 points

Dans chaque cas, dire si F est un sous-espace vectoriel de E ou non. Justifier.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{(x, y, z) \in E \mid x + y + z = 1\right\}$.
2. $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \left\{f \in E \mid f \text{ croissante}\right\}$.
3. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{(x, y, z) \in E \mid x = y \text{ et } 3y - 2z = 0\right\}$.
4. $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $F = \left\{M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in E \mid a + d = 0\right\}$.

   On pourra chercher à écrire $F = \operatorname{Vect}(\cdots)$.

Exercice 5 — 3 points

Les suites de l'exercice sont à valeurs réelles. On considère :

- $E = \left\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u \text{ converge}\right\}$,
- $F = \left\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lim u_n = 0\right\}$,
- $G = \left\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u \text{ constante}\right\}$.

E est un espace vectoriel, dont l'élément neutre (c'est-à-dire le vecteur nul) est la suite constante égale à 0.

1. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de E.

   On admettra que G est également un sous-espace vectoriel de E (il n'est donc pas demandé de le justifier).
2. À l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, prouver que $E = F \oplus G$.

   On prouvera que tout vecteur $w \in E$ s'écrit de façon unique sous la forme $w = u + v$, avec $u \in F$, $v \in G$.

Exercice 6 2 points

Dans chaque cas, dire si la famille $\mathscr{F}$ est une base de l'espace vectoriel E. Justifier.

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$:
$$\mathscr{F} = ((1,2,-1),(3,1,0),(0,1,4))\,.$$
2. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$:
$$\mathscr{F} = \left(X^2 - X + 1, 2X^2 + X, 3X - 2\right).$$

Exercice 7 1,5 points

Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $F = \left\{P \in E \mid P(0) = P'(0) = 0\right\}$.

Prouver que F est un sous-espace vectoriel de E et en déterminer une base.

Exercice 8 3 points

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. L'objectif de cette question est de montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.
   (a) Justifier l'implication réciproque.
   (b) Dans cette question, nous allons prouver l'implication directe par contraposée.
   On suppose donc que la proposition ($F \subset G$ ou $G \subset F$) est fausse.
      i. Justifier qu'il existe $f \in F \setminus G$ et $g \in G \setminus F$.
      ii. On considère de tels f et g et on pose $h = f + g$. Par l'absurde, montrer que $h \notin G$.
      iii. De même, montrer que $h \notin F$.
      iv. En déduire que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
3. Conclure.