Devoir surveillé n°7

19/02/24 – 2h – calculatrices autorisées

La rédaction et le soin seront pris en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 4 points

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 7$ et la formule de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 4 points

Dans cet exercice, on admettra sans justification que l'unique solution de l'équation $e^x - 1 = x$ est $x = 0$. [1]

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0,5$ et la formule de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{u_n} - 1.$$

1. Sur le document en annexe, construire les termes u_1 à u_3 sur l'axe des abscisses.

⚠ N'oubliez pas de joindre l'annexe à votre copie. ⚠

1. Pour le prouver, il faut faire une étude de fonction et utiliser le théorème de la bijection. Ce n'est pas difficile, mais c'est un peu long et en dehors des thèmes de révision du DS.

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0,5 \leq u_n \leq u_{n+1}.$$
3. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3 — 2 points

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :
$$\forall n, p \in \mathbb{N}^* \ : \ 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}.$$

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq u_{2n} \leq \frac{2}{n}$. En déduire la limite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer la limite de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 4 — 2.5 points

Pour tout entier naturel n non nul, on pose
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

1. Justifier brièvement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, puis prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5 — 6 points

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. **Sans la poser**, déterminer le reste dans la division euclidienne de $X^4 - 4X - 3$ par $X - 2$.
2. On pose $P(X) = X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 3$.
   (a) Vérifier que i est racine du polynôme P. En déduire que $X^2 + 1$ divise P.
   (b) Décomposer P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Vérifier que -1 est racine du polynôme $P(X) = X^6 + 2X^3 + 1$, puis déterminer son ordre de multiplicité.