Devoir surveillé n°6

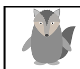
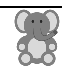
15/01/24 – 2h – calculatrices interdites

La rédaction et le soin seront pris en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 — 4 points

En 2024, 24 candidats participent à l'émission télévisée Koh-Lanta : 12 hommes et 12 femmes.

1. Avant le début du jeu, on attribue un animal totem à 4 aventuriers tirés au sort : un loup, un éléphant, un ours et un hibou (un même aventurier ne peut avoir deux totems). Ce totem les protégera d'une éventuelle élimination lors d'une épreuve. On affiche ensuite dans le camp un tableau qui ressemble à cela :

			
Léa	Pierre	Justine	Inès

   Combien de tableaux différents peut-on obtenir ?

2. On place les 24 candidats dans un labyrinthe. Des pouvoirs spéciaux seront attribués à ceux qui trouveront une petite tablette en argile représentant l'un des trois symboles suivants :

   $\boxed{\Psi}$ $\quad$ $\boxed{♈}$ $\quad$ $\boxed{♒}$

   (cette fois, un même candidat peut trouver plusieurs tablettes). On affiche dans le camp un tableau similaire à celui de la question 1.

   Combien de tableaux différents peut-on obtenir ?

3. Au début du jeu, on tire au sort deux équipes, *les jaunes* et *les rouges*, constituées chacune de 6 hommes et 6 femmes.
   Combien d'équipes différentes peut-on ainsi obtenir ?

4. Après quelques temps, il reste 11 jaunes et 8 rouges. Dans un souci d'équité, au moment de débuter un jeu, 3 jaunes sont écartés de leur équipe par tirage au sort. Combien d'équipes jaunes différentes peuvent-elles participer au jeu ?

Exercice 2 — 1.5 points

Soit n un entier naturel. En écrivant $k = (k+1) - 1$ et en utilisant la linéarité de $\sum$, prouver que

$$\sum_{k=0}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1.$$

Exercice 3 — 4.5 points

Résoudre chacun des deux systèmes. Interpréter géométriquement les réponses.

1. $\begin{cases} x - y + 4z = 1 \\ 2x - y + z = -3 \\ y - 2z = 10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - 14y - 10z = 17 \\ 5x + 2y - 4z = 3 \\ -x + 4y + 3z = -5 \end{cases}$

Exercice 4 — 3 points

1. Prouver que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer l'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ par la méthode de votre choix.

Exercice 5 — 3 points

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^2 et N^3. Que peut-on en déduire pour N^k lorsque $k \geq 3$?
2. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer une formule pour A^n, lorsque $n \geq 3$. On écrira la réponse de façon explicite.

Exercice 6 — 2.5 points

La trace d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, notée $\mathrm{tr}(A)$, est la somme des ses éléments diagonaux :

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22}.$$

1. Prouver que pour toutes matrices A, B dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:
   - $\mathrm{tr}(A - B) = \mathrm{tr}(A) - \mathrm{tr}(B)$.
   - $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
2. Existe-t-il des matrices M, N dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$MN - NM = I_2 \text{ ?}$$

   Justifier la réponse.