



Devoir surveillé n°5

11/12/23 – 2h – calculatrices interdites

La rédaction et le soin seront pris en compte dans l'évaluation.

Exercice 1

3 points

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-2x} + 1$.

1. Étudier les variations de f et calculer sa limite en $+\infty$. En déduire que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Déterminer l'expression de la bijection réciproque.

Exercice 2

3 points

Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x.$$

Exercice 3

4 points

On considère dans un r.o.n.d. de l'espace les points $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; 4)$ et $C(3; 1; 2)$.

Déterminer l'équation du plan (ABC) de deux façons différentes :

- en utilisant le produit vectoriel;
- en utilisant le déterminant.

**Exercice 4****4.5 points**

Dans un r.o.n.d. de l'espace, on considère la droite (d) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

et les points $A(0; 1; 1)$ et $B(-2; 3; 2)$.

1. Prouver que le plan (P) : $x + 2y - 2z - 3 = 0$ contient la droite (d) et qu'il est parallèle à la droite (AB).
2. Déterminer la représentation paramétrique de la perpendiculaire Δ au plan (P) passant par A .
3. En déduire les coordonnées de H , projeté orthogonal de A sur (P).
4. Déterminer la distance de la droite (d) à la droite (AB).

Exercice 5**5.5 points**

1. Prouver que pour tout réel a tel que $\cos a \neq 0$:

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}.$$

2. En déduire que pour tout réel x :

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

3. En utilisant la question précédente, prouver que pour tout réel x :

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

4. Soit $A = \arctan 2 + \arctan 3$.

(a) Prouver que $\cos A = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- (b) Encadrer A et en déduire la valeur de A .