



Devoir surveillé n°3

06/11/23 – 2h – calculatrices autorisées

Exercice 1

3 points

1. Écrire sous forme exponentielle les nombres :

(a) $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

(b) $z_2 = \sqrt{3} - i$

(c) $Z = z_1 \times z_2$

2. Calculer Z^6 sous forme algébrique.

Exercice 2

4 points

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^2 + 4z + 1 - 4i = 0.$$

Exercice 3

3 points

Soit x un nombre réel.

1. Rappeler les formules d'Euler :

$$\cos x = \dots \quad \sin x = \dots$$

2. En utilisant les formules d'Euler, redémontrer la formule du cours de trigonométrie :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Exercice 4

3 points

On considère sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) : y' + 3y = e^{2x}.$$

1. Résoudre l'équation homogène associée $(H) : y' + 3y = 0$.

2. Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire la solution générale de (E) .

3. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

**Exercice 5****3 points**

1. Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle

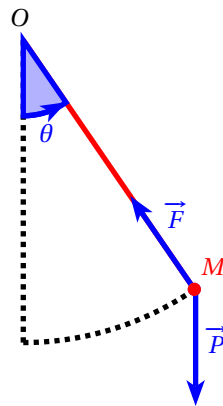
$$(E) : y'' - 4y' + 4y = 8.$$

2. Déterminer l'unique solution vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Exercice 6**3 points**

Dans cet exercice, le temps est exprimé en secondes et les distances sont exprimées en mètres.

Un pendule oscillant non amorti est lâché sans vitesse initiale à un angle initial $\theta(0) = \frac{\pi}{6}$.



L'angle $\theta(t)$ est une fonction du temps t qui vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \sin\theta,$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Cette équation n'est pas linéaire et on ne peut obtenir que des solutions approximatives via des outils numériques. Cependant, lorsque θ est « suffisamment petit », il est courant de procéder à l'approximation $\sin\theta \approx \theta$. L'équation différentielle devient alors :

$$(E) : \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta.$$

1. Déterminer l'unique solution de (E) répondant aux conditions initiales.
2. Pour quelle valeur de ℓ la période d'oscillation du pendule est-elle de 2 secondes? (Donner une valeur arrondie au cm en prenant $g = 9,81$.)

Le barème est donné sur 19. La note finale sera ramenée à 20.