



Devoir surveillé n°2

02/10/23 – 3h – calculatrices interdites

Exercice 1

6 points

Les questions 1 à 4 sont indépendantes les unes des autres.

1. Calculer les limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x + 1) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - x + 1).$$

2. À l'aide de la transformation de Fresnel, résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$\sqrt{2} \cos(3x) + \sqrt{2} \sin(3x) = 2.$$

3. En remarquant que $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$, déterminer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$, puis prouver que $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

4. Étudier la parité et la périodicité de la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3 \sin^2 x - 1.$$

Exercice 2

4 points

1. Déterminer une solution évidente α de l'équation $2X^3 - 5X^2 - 4X + 3 = 0$, puis factoriser $2X^3 - 5X^2 - 4X + 3 = 0$ sous la forme $(X - \alpha)f(X)$, où f est une fonction de degré 2 à déterminer.

2. Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation

$$2 \sin^3 x - 5 \sin^2 x - 4 \sin x + 3 = 0.$$

**Exercice 3****6 points**

1. Soit $u :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - 1 + 2 \ln x$.
 - (a) Étudier les variations de u .
 - (b) Calculer $u(1)$ et construire le tableau de signes de u .
2. Soit $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - \frac{\ln x}{x^2}$.
 - (a) Prouver que pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{u(x)}{x^3}.$$

- (b) En déduire les variations de f .
- (c) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et compléter le tableau de variations.
- (d) La fonction f est-elle majorée? Minorée? Bornée?

Exercice 4**2,5 points**

1. On note \mathcal{C} la courbe de la fonction \sin , et (T) sa tangente au point de coordonnées $(0; 0)$.
Déterminer l'équation de (T) .
2. Étudier les variations de la fonction $g : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - \sin x$.
3. Prouver que \mathcal{C} est en-dessous de (T) sur l'intervalle $[0; \pi]$.

Exercice 5**2,5 points**

1. Prouver que pour tout réel a :

$$\sin(4a) = 4 \cos(2a) \cos(a) \sin(a).$$

2. Calculer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.