



Devoir surveillé n°11

05/06/24 – 2h – calculatrices autorisées

La rédaction et le soin seront pris en compte dans l'évaluation.

Exercice 1

7,5 points

Les questions 1 à 3 sont indépendantes les unes des autres.

1. Dans chaque question, donner un développement limité de la fonction en 0 et à l'ordre 3.

(a) $x \mapsto \sqrt{1+x} \ln(1+x)$.

(b) $x \mapsto e^{\sin x}$.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

3. Déterminer l'allure de la courbe $\mathcal{C} : y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}x^2$ au voisinage de 0.



On fera un dessin.

Exercice 2

4,5 points

Soit $g : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P(X) + (1-X)P'(X)$.

1. Prouver que g est linéaire.

2. (a) Soit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$. Prouver que

$$g(P) = -2aX^3 + (-b + 3a)X^2 + 2bX + c + d.$$

(b) Déterminer le noyau de g .

3. (a) Prouver que le rang de g est égal à 3.

(b) Calculer $g(1)$, $g(X^2)$ et $g(X^3)$. En déduire une écriture de $\text{Im}(g)$ sous la forme $\text{Vect}(\dots)$.

**Exercice 3****3 points**

Dans cet exercice, on pourra utiliser librement la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1; 2; \dots; n\}$.

1. Prouver que $E(X) = \frac{n+1}{2}$.
2. Calculer $E(X^2)$ (on indiquera le théorème utilisé). En déduire que $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

Exercice 4**5 points**

On estime que 2 % de la population française est végétarienne.

Un restaurateur reçoit 250 personnes un midi, on note X le nombre de végétariens parmi ses clients.

1. Déterminer la loi de X (compte tenu de la taille de la population française, on pourra considérer que nous sommes dans le cas d'un tirage avec remise).

Dans toute la suite de l'exercice, on arrondira les réponses au millième.

2. Calculer la probabilité des événements :
 A : « 5 des 250 clients sont végétariens. »
 B : « il y a au moins un végétarien parmi les clients. »
3. Un repas végétarien coûte 9 €, un repas avec viande 12 €. On note Y le coût total des repas de l'ensemble des clients.
Prouver que $Y = -3X + 3000$, puis calculer $E(Y)$.
4. Au cours de l'année, le restaurateur reçoit 20 000 clients. Il a prévu 500 menus végétariens. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev, majorer la probabilité de l'événement C : « le restaurateur n'a pas suffisamment de menus végétariens pour ses clients. »