Devoir surveillé n°10

07/05/24 – 3h – calculatrices interdites

La rédaction et le soin seront pris en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 5 points

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. Calculer $I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \mathrm{d}x$ en cherchant une primitive.
2. Calculer $K = \int_0^1 2t \arctan t \mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Calculer $L = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1} \mathrm{d}x$ à l'aide d'un changement de variable.
4. En utilisant une somme de Riemann, déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$.

Exercice 2 4,5 points

On pose $I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \mathrm{d}x$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. (a) Soient un réel $1 \leq x \leq \mathrm{e}$ et un entier naturel n. Prouver que
$$0 \leq (\ln x)^{n+1} \leq (\ln x)^n.$$
   (b) En déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée.
3. (a) Établir que pour tout entier naturel n : $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 3 2 points

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par
$$f(x, y, z) = (x - y, x + y - z).$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
2. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, puis $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4 — 4 points

Soit $g : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P(X) + (1-X)P'(X)$.

1. Prouver que g est linéaire.
2. (a) Soit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$. Prouver que
$$g(P) = -2aX^3 + (-b+3a)X^2 + 2bX + c + d.$$
   (b) Déterminer le noyau de g.
3. (a) Prouver que le rang de g est égal à 3.
   (b) Calculer $g(1)$, $g\left(X^2\right)$ et $g\left(X^3\right)$. En déduire une écriture de $\mathrm{Im}(g)$ sous la forme $\mathrm{Vect}(\cdots)$.

Exercice 5 — 4,5 points

Dans l'espace $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère le sous-espace
$$H = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

1. Démontrer que H est un sous-espace vectoriel de E.
2. Prouver que $u : H \to E, f \mapsto f'$ est une application linéaire.
3. (a) H contient-il des fonctions constantes ? Si oui, lesquelles ?
   (b) Démontrer que u est injective.
4. (a) Déterminer une fonction f telle que $u(f) = g$, où g est la fonction $t \mapsto t^2$.
   (b) ( ) En vous inspirant du raisonnement de la question 4.(a), prouver que u est un isomorphisme.

Exercice 6 — 2 points

Soit E un espace vectoriel et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = u$.

1. Soit $x \in E$. En écrivant $x = x - u(x) + u(x)$, prouver que
$$E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u).$$
2. Démontrer que la somme est directe dans la question précédente.