Devoir maison n°8

à rendre le 22/01

Exercice 1

Dans un étang se trouvent deux populations de poissons : des gardons et des brochets. Le brochet est un prédateur naturel du gardon. Sa population d'une année sur l'autre varie donc en fonction :

- du nombre de brochets déjà présents dans l'étang (reproduction),
- du nombre de gardons déjà présents dans l'étang (proies).

De la même façon, la population du gardon évolue en fonction :

- du nombre de gardons déjà présents dans l'étang (reproduction),
- du nombre de brochets déjà présents dans l'étang (prédateurs).

Au premier janvier 2021, on relève 1000 gardons et 100 brochets dans l'étang. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note g_n, respectivement b_n, le nombre de gardons, resp. de brochets, au 1er janvier de l'année $2021 + n$.

Après une étude, des biologistes ont déterminé que les suites $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les relations de récurrence croisées suivantes :

$$\begin{cases} g_{n+1} &= 1,1 g_n - 0,2 b_n \\ b_{n+1} &= 0,4 g_n + 0,5 b_n. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} g_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,2 \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle relation relie U_n, U_{n+1} et A ? En déduire une relation entre U_n, A et U_0 lorsque n est un entier supérieur ou égal à 1.
2. Soit P la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
3. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D.
4. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$: $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire une expression de g_n et de b_n pour tout entier $n \geq 1$. Quelle est la limite des deux suites $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Quelle interprétation en faites-vous ?

Exercice 2

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n),$$

où

$$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1+x}.$$

1. (a) Construire dans un même repère, sur l'intervalle $[0,1]$, la droite d'équation $y = x$ et la courbe représentant la fonction f. On prendra 10 carreaux ou 10 cm comme unité graphique.

   (b) Construire u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

   Dans la suite de l'exercice, on pourra admettre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.

2. On note φ la solution positive de l'équation $f(x) = x$. Calculer φ, puis prouver que pour tout $x \geq 0$:
$$\left|f(x) - f(\varphi)\right| \leq \frac{|x-\varphi|}{1+\varphi}.$$

3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\left|u_n - \varphi\right| \leq \left(\frac{1}{1+\varphi}\right)^n \left|1-\varphi\right|.$$

4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.