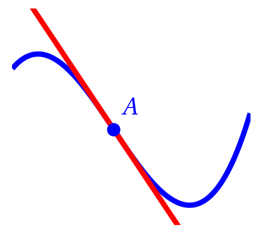
Devoir maison n°3

à rendre le 09/10

Point d'inflexion.

On dit qu'un point $A(a; f(a))$ situé sur la courbe d'une fonction f est un point d'inflexion si la dérivée seconde de f change de signe en a.

Un point d'inflexion est caractérisé par une forme en « S ».



Ce devoir est consacré à la fonction $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. *Dans cette question, on démontre deux des résultats de croissances comparées du cours.*

   Soit $k : [0; +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$.

   (a) Étudier les variations de k sur $[0; +\infty[$. On ne demande pas de calculer la limite en $+\infty$.

   (b) En déduire que pour tout $x \in]0; +\infty[$:
   $$0 \leq x\mathrm{e}^{-x} \leq \frac{4\mathrm{e}^{-2}}{x}.$$

   (c) En utilisant le théorème des gendarmes, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x}$.

   (d) En utilisant la question précédente et le théorème sur la limite d'une composée, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

2. On donne : $\forall x \in [0; +\infty[,\ f'(x) = (-x+1)\mathrm{e}^{-x},\ f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$. On ne demande pas de vérifier ces résultats.

   (a) Construire le tableau de variations de f.

   (b) Prouver que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion A dont on donnera les coordonnées exactes.

   (c) Déterminer l'équation de la tangente T_O à $\mathscr{C}$ au point $O(0; 0)$, puis l'équation de la tangente T_A à $\mathscr{C}$ au point A.

   (d) Construire la courbe $\mathscr{C}$ en utilisant les résultats des questions précédentes. On choisira des unités adaptées.
   Pour tracer T_A, on cherchera son intersection avec l'axe des abscisses.

3. (a) Déterminer une primitive de f sur $[0; +\infty[$ de la forme $F : x \mapsto (ax + b)\,\mathrm{e}^{-x}$.

   (b) Pour $t > 0$, on note $I(t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x$.
   Exprimer $I(t)$ en fonction de t, puis calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t)$. À quoi ce résultat correspond-il sur le graphique ?