Devoir maison n°18

Polynômes de Bernstein

à rendre le 10/06

L'objectif du devoir est de démontrer le résultat suivant :

Théorème d'approximation de Bernstein

Si φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors il existe une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de fonctions polynomiales telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{0\leq t\leq 1} \left|\varphi(t) - P_n(t)\right| = 0.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$. On note

$$B_n^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

   (a) Donner le degré de B_n^k.

   (b) Pour tout $0 \leq t \leq 1$, calculer $\sum_{k=0}^{n} B_n^k(t)$.

2. (a) Démontrer que si Z est une variable aléatoire à valeurs positives, alors $E(Z) \geq 0$. En déduire que si X, Y sont deux variables aléatoires telles que $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

   (b) On rappelle que la variance d'une variable aléatoire X est définie par

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right].$$

   Rappeler et redémontrer la formule de Koenig-Huygens.

   (c) En déduire que pour toute variable aléatoire X, $|E(X)| \leq \sqrt{E\left(X^2\right)}$.

3. Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $0 \leq t \leq 1$ et S_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, t. On pose $X_n = \varphi\left(\frac{S_n}{n}\right) - \varphi(t)$.
   (a) Rappeler la valeur de l'espérance de S_n, ainsi que sa variance.
   (b) En déduire $E\left(\frac{S_n}{n} - t\right) = 0$ et $E\left[\left(\frac{S_n}{n} - t\right)^2\right] = \frac{t(1-t)}{n}$.
   (c) Démontrer qu'il existe un réel positif M tel que
   $$\forall a, b \in [0,1], \qquad |\varphi(b) - \varphi(a)| \leq M|b-a|.$$
   (d) En utilisant les questions 2.(a), 2.(c), 3.(b) et 3.(c) (dans un ordre à déterminer), montrer que
   $$|E(X_n)| \leq \frac{M}{\sqrt{n}}\sqrt{t(1-t)}.$$
   (e) À l'aide d'une étude de fonction, en déduire que
   $$|E(X_n)| \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}.$$
   (f) En citant le théorème utilisé, démontrer que
   $$\left|\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k(t)\right| \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}.$$
   (g) Conclure.