



Devoir maison n°15

à rendre le 15/04

Les questions 1 à 4 sont indépendantes les unes des autres.

1. Calculer $\int_0^1 t \arctan t dt$ à l'aide d'une intégration par parties.
2. Calculer $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ à l'aide d'un changement de variable (et, au besoin, d'une intégration par parties).
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$.

On commencera par faire un changement d'indice dans la somme.

4. Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^n} dx$.

(a) Prouver que pour tout entier naturel n , pour tout $x \in [0, 1]$:

$$x(1 - x^n) \leq \frac{x}{1 + x^n} \leq x.$$

(b) En déduire un encadrement de I_n , puis la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.