Devoir maison n°14

à rendre le 08/04

Les questions 1 à 5 sont indépendantes les unes des autres.

1. On distribue une main de 5 cartes à un joueur de Poker (le jeu compte 52 cartes). Quelle est la probabilité qu'il ait une paire de rois ?
2. On considère un espace probabilisé (Ω, P). Déterminer les événements $A \subset \Omega$ indépendants d'eux-mêmes
3. Une urne contient 3 boules noires et 5 blanches. On tire successivement deux boules de l'urne. Lorsqu'on tire une boule noire, on la garde et on la remplace par une blanche ; lorsqu'on tire une blanche, on la garde et on la remplace par une noire.

   On note A : « après les deux tirages, l'urne a retrouvé sa composition initiale » et N_i (respectivement B_i) les événements « la i-ième boule tirée est noire (respectivement blanche) ».

   (a) Exprimer A en fonction de N_1, N_2, B_1 et B_2.

   (b) Calculer $P(A)$.
4. On dispose de deux dés : le dé n°1 est équilibré, le n°2 est tel que la probabilité de faire 6 est égale à $\frac{1}{2}$, les autres faces étant équiprobables.

   On choisit un dé au hasard, on le lance et on obtient 6. En utilisant la formule de Bayes, calculer la probabilité d'avoir lancé le dé n°1.
5. Une information de type "oui"/"non" est transmise à l'intérieur d'une population. L'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante avec une probabilité $p = \frac{1}{3}$, et transmise de façon contraire avec la probabilité $1 - p = \frac{2}{3}$.

   Le 1^er^ individu de la chaîne possède l'information "oui".

   Pour tout entier $n \geq 1$, on note O_n l'événement « le n-ième individu possède l'information "oui" », et p_n la probabilité de l'événement O_n. On a donc en particulier $p_1 = P(O_1) = 1$.

   (a) Prouver que pour tout entier $n \geq 1$:

   $$p_{n+1} = -\frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}.$$

   (b) Étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.