Devoir maison n°13

à rendre le 25/03

Partie I

On définit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto (1-x)\mathrm{e}^x - x$.

1. Étudier les variations de f et calculer sa limite en $+\infty$.
2. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α, puis que α appartient à l'intervalle $[0,1]$.

Partie II

On définit $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $0 \le u_0 \le 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n).$$

1. (a) Étudier les variations de g et prouver que $g(\alpha) = \alpha$.

   (b) Démontrer que pour tout $0 \le x \le 1$:

   $$|g'(x)| \le \frac{\mathrm{e}}{4}.$$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

   $$0 \le u_n \le 1.$$

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

   $$|u_n - \alpha| \le \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n.$$

4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.