



Devoir maison n°10

à rendre le 05/02

Les six questions sont indépendantes.

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ divisibles par $(X - 1)$ et tels que $P(2) = P(0)$.
2. Sans la poser, déterminer le reste dans la division euclidienne de $X^5 - X^4 + 2X^3 - 5X + 4$ par $X^2 - 1$.
3. Vérifier que $2 + i$ est racine du polynôme $P(X) = X^3 - 7X^2 + 17X - 15$. En déduire une décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.
4. On admet que le polynôme $P(X) = 9X^4 - 25X^2 + 20X - 4$ admet les nombres $\frac{1}{3}$, -2 et 1 comme racines. Sans faire de division euclidienne, déterminer la quatrième racine de P .
5. Sans poser la division (!), prouver que $(X + 1)^2$ divise $X^{54} + 2X^{27} + 1$.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation

$$P'P'' = X^4 - X^3 + 3X^2 - 4X + 1.$$