Corrigé du devoir surveillé n°9

Exercice 1

Soient $E=\mathbb{R}^3$, $F=\{(x,y,z)\in E \mid x+y+z=0\}$ et $v=(1,1,1)$.

1.

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$$

car c'est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $x+y+z=0$.

Soit $u=(x,y,z)$ un vecteur de E. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} u\in F &\iff x+y+z=0 \\ &\iff z=-x-y \\ &\iff u=(x,y,-x-y) \\ &\iff u=x(1,0,-1)+y(0,1,-1), \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{F=\mathrm{Vect}\left((1,0,-1),(0,1,-1)\right).}$$

La dimension de F est égale au rang de la famille $\mathscr{F}=\left(\underbrace{(1,0,-1)}_{f_1},\underbrace{(0,1,-1)}_{f_2}\right)$. Or ce rang est égal à 2, puisque les vecteurs f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires. On a donc

$$\boxed{\dim(F)=2.}$$

2. (a) On va prouver que $F\cap G=\{0_E\}$ par double inclusion.
   - $\boxed{\supset}$ F et G sont des sev de E, donc il contiennent 0_E. On en déduit $0_E\in F\cap G$; et donc $\{0_E\}\subset F\cap G$.
   - $\boxed{\subset}$ Soit u un vecteur de $F\cap G$. Comme $u\in G$, on peut écrire $u=(\lambda,\lambda,\lambda)$, où λ est un réel. Et comme $u\in F$, $\lambda+\lambda+\lambda=0$, donc $\lambda=0$. On en déduit $u=0_E$, donc $F\cap G\subset\{0_E\}$.

   Conclusion :

$$\boxed{F\cap G=\{0_E\}.}$$

   (b) D'après la formule de Grassmann :

$$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)=2+1-0=3=\dim E.$$

   Conclusion :

$$\left.\begin{array}{ll} \dim(F+G) & =\dim E \\ F+G & \subset E \end{array}\right\} \Longrightarrow F+G=E$$

   Comme par ailleurs $F\cap G=\{0_E\}$, on a bien

$$\boxed{E=F\oplus G.}$$

Exercice 2

1. • Il y a 8 boules blanches parmi les 10 de l'urne, donc $\boxed{P(A_1) = \frac{8}{10}.}$

   • Si l'événement A_1 est réalisé, il reste 7 boules blanches parmi les 9 de l'urne, donc $\boxed{P_{A_1}(A_2) = \frac{7}{9}.}$

   • Si l'événement $A_1 \cap A_2$ est réalisé, il reste 6 boules blanches parmi les 8 de l'urne, donc $\boxed{P_{A_1 \cap A_2}(A_3) = \frac{6}{8}.}$

2. D'après la formule des probabilités composées :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{7}{15}.$$

Or l'événement B est le contraire de $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, donc

$$P(B) = 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

$$\boxed{P(B) = \frac{8}{15}.}$$

3. On doit calculer $P_B(N)$. On utilise la formule de Bayes :

$$P_B(N) = \frac{P_N(B) \times P(N)}{P(B)}.$$

On sait que $P(B) = \frac{8}{15}$, et il est clair que $P(N) = \frac{2}{10}$. Par ailleurs, l'événement N entraîne automatiquement l'événement B (si la 1re boule est noire, il y en a au moins une noire parmi les trois tirées), donc $P_N(B) = 1$. Finalement

$$P_B(N) = \frac{1 \times \frac{2}{10}}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{8}.$$

$\boxed{\text{Sachant qu'au moins une boule noire figure dans le tirage, la probabilité que la première boule tirée soit noire est } \frac{3}{8}.}$

Exercice 3

On applique le TAF avec :
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \arctan t$;
- $x = 0,\ y = x$;
- $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

D'après le TAF, il existe un réel $0 \leq c \leq x$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= f'(c)(x-0) \\ \arctan x - \arctan 0 &= \frac{1}{1+c^2} \times x \\ \arctan x &= \frac{x}{1+c^2}. \end{aligned}$$

Or

$$0 \leq c \leq x \implies 0 \leq c^2 \leq x^2 \implies 1 \leq 1+c^2 \leq 1+x^2 \implies \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+c^2} \leq 1,$$

donc en multipliant par x (qui est positif) :

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{x}{1+c^2} \leq x.$$

Conclusion :

$$\boxed{\frac{x}{x^2+1} \leq \arctan x \leq x.}$$

Exercice 4

La fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, car c'est le produit des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$

$$u : x \mapsto x \qquad \text{et} \qquad v : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}.$$

$$u^{(0)}(x) = x$$
$$u^{(1)}(x) = 1$$
$$\forall k \geq 2 \,:\, u^{(k)}(x) = 0$$

$$\forall k \geq 0 \,:\, v^{(k)}(x) = (-1)^k \mathrm{e}^{-x}$$

D'après la formule de Leibniz, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)\, v^{(n-k)}(x) \\
&= \binom{n}{0} u^{(0)}(x)\, v^{(n)}(x) + \binom{n}{1} u^{(1)}(x)\, v^{(n-1)}(x) + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{u^{(k)}(x)}_{=0, \text{ car } k \geq 2} v^{(n-k)}(x) \\
&= 1 \times x \times (-1)^n \mathrm{e}^{-x} + n \times 1 \times (-1)^{n-1} \mathrm{e}^{-x} \\
&= (-1)^n \mathrm{e}^{-x} (x - n).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \,:\, f^{(n)}(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{-x} (x - n).}$$

Exercice 5

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arcsin\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$.

1. Pour tout $x \in [-1, 1]$, $g'(x) = -2x$. On en déduit les variations de g :

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

- La fonction racine n'est pas dérivable en 0. Or

$$g(x) = 0 \iff (x = -1 \text{ ou } x = 1),$$

donc il y a un problème de dérivabilité pour f en 1 et en -1.
- La fonction arcsin n'est pas dérivable en 1 et en -1. Or il est impossible que $\sqrt{1 - x^2}$ soit égal à -1 d'une part; et

$$\sqrt{1 - x^2} = 1 \iff 1 - x^2 = 1 \iff -x^2 = 0 \iff x = 0$$

d'autre part, donc il y a un problème de dérivabilité pour f en 0.

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } D =]-1, 0[\cup]0, 1[.}$$

2. Grâce à la formule $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, on trouve que la dérivée de $u : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est $u' : x \mapsto \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. Puis en utilisant la formule $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ on obtient, pour tout $x \in D$:

$$f'(x) = \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}^2}} = \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-(1-x^2)}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\boxed{\forall x \in D \; : \; f'(x) = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}.}$$

3. On distingue deux cas :
   - Si $0 < x < 1$, $f'(x) = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, donc $f(x) = \arccos x + C$, où C est une constante. De plus f est continue sur $[0,1]$ par opérations sur des fonctions continues, donc la formule est encore vraie pour $x = 0$ et pour $x = 1$:

     $$\forall x \in [0,1] \; : \; f(x) = \arccos x + C.$$

     Pour trouver C, on remplace (par exemple) x par 0 :

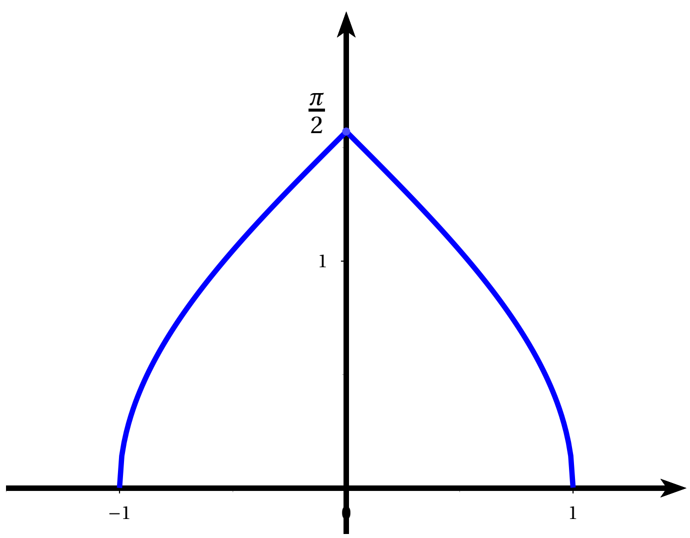
     $$f(0) = \arcsin\left(\sqrt{1-0^2}\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \arccos 0 + C = \frac{\pi}{2} + C,$$

     donc $C = 0$, et finalement $f(x) = \arccos x$.
   - Si $-1 < x < 0$, on applique la même méthode. On obtient (je ne détaille pas) $f(x) = \pi - \arccos x$ pour $x \in [-1,0]$.

   Conclusion :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \arccos x & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ \pi - \arccos x & \text{si } -1 \le x \le 0. \end{cases}}$$

4.



Remarque : vu les formules pour $f(x)$ obtenues dans les questions précédentes, la fonction f est dérivable à droite et à gauche en 0 (ou les pentes valent respectivement -1 et 1).