Corrigé du devoir surveillé n°8

Exercice 1

Partie I

On pose $g : x \mapsto 1 - x - \ln x$.

1. L'ensemble de définition de g est
$$\boxed{D_g =]0, +\infty[\,.}$$
$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est continue sur son ensemble de définition}}$ par opérations sur des fonctions continues.

2. Pour tout $x \in]0, +\infty[$:
$$g'(x) = -1 - \frac{1}{x} = \frac{-x-1}{x}.$$
On en déduit :

x	0		x_0		$+\infty$
$g'(x)$	‖		$-$		
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Le calcul des limites est immédiat en appliquant les règles de calcul (on rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to 0,\ x>0} \ln x = -\infty$).

3. La fonction g est continue et strictement décroissante, donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$.
Or $0 \in]-\infty, +\infty[$, donc
$$\boxed{\text{l'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution } x_0 \text{ dans }]0, +\infty[\,.}$$

4. $\boxed{g(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0, \text{ donc } x_0 = 1.}$

Partie II

On pose $f : x \mapsto \frac{\ln x}{1-x-\ln x}$.

1. Ici, il faut faire attention à deux choses :
   - au logarithme, qui impose de prendre $x > 0$:
   - au quotient, car on ne peut pas diviser par 0.

   Or d'après la partie I, le dénominateur s'annule uniquement lorsque $x = 1$, donc l'ensemble de définition de f est
   $$\boxed{D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[\,.}$$
   $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur son ensemble de définition}}$ par opérations sur des fonctions continues.

2. Pour $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, on écrit
   $$\frac{\ln x}{1-x} = -\frac{\ln(1+(x-1))}{x-1}$$
   et on utilise une limite de référence et la limite d'une composée :
   $$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to1}(x-1) & = 0\\ \lim\limits_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X} & = 1\end{array}\right\} \implies \lim_{x\to1}\frac{\ln(1+(x-1))}{x-1} = 1.$$
   On en déduit :
   $$\boxed{\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x} = -1.}$$
   On se tourne à présent vers le prolongement par continuité. Soit $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. On écrit astucieusement :
   $$f(x) = \frac{\ln x}{1-x-\ln x} = \frac{\frac{\ln x}{1-x}}{\frac{1-x-\ln x}{1-x}} = \frac{\frac{\ln x}{1-x}}{1-\frac{\ln x}{1-x}}.$$
   Or $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x} = -1$, donc
   $$\lim_{x\to1} f(x) = \frac{-1}{1-(-1)} = -\frac{1}{2}.$$
   Conclusion : $\boxed{\text{on peut prolonger } f \text{ par continuité en 1 en posant } f(1) = -\tfrac{1}{2}.}$

Exercice 2

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\frac{f(x)}{\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^x - x}{\mathrm{e}^x} = 1 - x\mathrm{e}^{-x}.$$
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x\mathrm{e}^{-x}) = 1$ et ainsi
   $$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x.}$$

2. $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, donc $\lim_{x\to 0} \cos\left(x^2\right) = \cos 0 = 1$ par continuité de cos en 0. On a donc

$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1.}$$

3. La détermination d'un équivalent est plus délicate ici : on écrit, pour $x > 0$ suffisamment petit (de telle manière que $\sin x$ soit strictement positif et que $\ln x \neq 0$) :

$$h(x) = \ln(\sin x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x} \times x\right) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \ln x.$$

On a donc

$$\frac{h(x)}{\ln x} = \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\ln x} + 1.$$

Or $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, donc $\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln 1 = 0$ par continuité de ln en 1. Comme par ailleurs $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, on obtient $\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)}{\ln x} = 1$.

Conclusion : $\boxed{h(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln x.}$

Exercice 3

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. On pose $g(x) = x - f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

1. On calcule et on détermine le signe :
   - $g(0) = 0 - f(0) = -f(0)$. Or f est à valeurs dans $[0,1]$, donc $\boxed{g(0) \leq 0.}$
   - $g(1) = 1 - f(1)$. Or f est à valeurs dans $[0,1]$, donc $1 - f(1) \geq 0$. Autrement dit : $\boxed{g(1) \geq 0.}$
2. La fonction g est continue sur $[0,1]$ par opérations sur des fonctions continues. De plus $g(0) \leq 0$ et $g(1) \geq 0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ a au moins une solution dans $[0,1]$.

   Or l'égalité $g(x) = 0$ est équivalente à $f(x) = x$, donc

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ a au moins une solution dans } [0,1].}$$

Exercice 4

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{(x, y, z) \in E \mid x + y + z = 1\right\}$.

   F ne contient pas le vecteur nul $0_E = (0,0,0)$, car $0+0+0 \neq 1$, donc

$$\boxed{F \text{ n'est pas un sev de } E.}$$

2. $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \left\{f \in E \mid f \text{ croissante}\right\}$.

   La fonction $f : x \mapsto x$ est croissante, donc elle est dans F.
   On pose $g = -1 \cdot f$. La fonction $g : x \mapsto -x$ n'est pas croissante, donc

$$\boxed{F \text{ n'est pas un sev de } E.}$$

3. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\left\{(x,y,z)\in E \mid x=y \text{ et } 3y-2z=0\right\}$.

   F est l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires homogène $\begin{cases} x-y &=0\\ 3y-2z &=0\end{cases}$, donc

   $$\boxed{F \text{ est un sev de } E.}$$

   Remarque : On pouvait aussi résoudre ce système pour en déduire $F=\operatorname{Vect}\left(\left(1,1,\frac{3}{2}\right)\right)$.

4. $E=\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $F=\left\{M=\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in E \mid a+d=0\right\}$.

   Soit $M=\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in E$. On a les équivalences :

   $$M\in F \iff a+d=0 \iff d=-a \iff M=\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & -a\end{pmatrix} \iff M=a\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

   Conclusion : $F=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$, donc

   $$\boxed{F \text{ est un sev de } E.}$$

Exercice 5

Les suites de l'exercice sont à valeurs réelles. On considère :

- $E=\left\{u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u \text{ converge}\right\}$,
- $F=\left\{u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lim u_n=0\right\}$,
- $G=\left\{u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u \text{ constante}\right\}$.

1. - D'abord $F\subset E$, car une suite de limite nulle converge.
   - La suite constante égale à 0 (élément neutre de E) appartient à F, puisqu'elle a une limite nulle.
   - Soient $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans F et soient λ, μ deux réels. On pose $w=\lambda u+\mu v$, c'est-à-dire que $w_n=\lambda u_n+\mu v_n$ pour tout entier naturel n.
     Les suites $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans F, donc $u_n\to 0$ et $v_n\to 0$. On en déduit que $w_n\to\lambda\times 0+\mu\times 0=0$, donc $w=(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F.

   Conclusion : $\boxed{F \text{ est un sev de } E.}$

2. On prouve que $E=F\oplus G$ en utilisant un raisonnement par analyse synthèse.

   Soit $w=(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un vecteur de E. C'est une suite convergente, on note ℓ sa limite.

   - **Analyse.** On suppose que $w=u+v$, avec $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in G$. On a donc $u_n\to 0$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à c et
     $$w_n=u_n+v_n$$
     pour tout entier naturel n.

Par opération sur les limites :

$$\begin{aligned}\lim w_n &= \lim u_n + \lim v_n\\ \ell &= 0 + c\\ \ell &= c.\end{aligned}$$

Conclusion : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à ℓ et

$$u_n = w_n - v_n = w_n - \ell$$

pour tout entier naturel n.

- **Synthèse.** On pose $u_n = w_n - \ell$ et $v_n = \ell$ pour tout entier naturel n.

  On a bien $u \in F$, puisque $u_n \to \ell - \ell = 0$; et $v \in G$, car v est constante. Enfin, $w_n = w_n - \ell + \ell = u_n + v_n$ pour tout entier naturel n, donc $w = u + v$.
- **Conclusion.** Tout vecteur $w \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $w = u + v$, avec $u \in F$ et $v \in G$, donc

$$\boxed{E = F \oplus G.}$$

Exercice 6

1. $E = \mathbb{R}^3$, $\mathscr{F} = ((1,2,-1),(3,1,0),(0,1,4))$.

   E est un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{F}$ une famille de 3 vecteurs, donc c'est une base si, et seulement si elle est libre. Cela équivaut à ce que la matrice

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

   soit inversible (ou de rang 3).
   C'est bien le cas ; et il y a trois façons de le prouver : en la réduisant jusqu'à avoir une matrice réduite échelonnée en lignes (ce qui revient à calculer son inverse, si l'on fait en parallèle les opérations en partant de la matrice identité), en résolvant un système, ou en prouvant que son déterminant est non nul.

   Nous utilisons le déterminant (méthode la plus rapide), que nous calculons en développant par rapport à la 3ᵉ colonne :

   $$\det A = 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix} + 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 0\times 1 - 1\times 3 + 4\times(-5) = -23.$$

   Conclusion : $\det A \neq 0$, donc A est inversible et $\boxed{\mathscr{F} \text{ est une base de } E.}$
2. $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathscr{F} = \left(\underbrace{X^2 - X + 1}_{P}, \underbrace{2X^2 + X}_{Q}, \underbrace{3X - 2}_{R}\right)$.

   On remarque que $R = Q - 2P$, donc la famille $\mathscr{F}$ n'est pas libre.
   Conclusion : $\boxed{\mathscr{F} \text{ n'est pas une base de } E.}$

Exercice 7

Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $F = \{P \in E \mid P(0) = P'(0) = 0\}$.

Pour prouver que F est un sous-espace vectoriel de E et en déterminer une base, il est agréable de chercher à l'écrire sous la forme $F = \text{Vect}(\cdots)$.

Soit $P \in E = \mathbb{R}_3[X]$. On a les équivalences :

$$P \in F \iff P(0) = P'(0) = 0 \iff 0 \text{ racine de } P \text{ d'ordre } 2 \iff X^2 \text{ divise } P.$$

Donc

$$P \in F \iff P = X^2 Q(X), \text{ avec } \deg(Q) \leq 1 \iff P = X^2(aX+b) \iff P = aX^3 + bX^2.$$

Autrement dit,

$$F = \text{Vect}\left(X^3, X^2\right).$$

Enfin, la famille $\mathscr{F} = \left(X^3, X^2\right)$ est libre, car c'est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés, donc

$$\boxed{F \text{ est un sev de } E \text{ et } \mathscr{F} = \left(X^3, X^2\right) \text{ est une base de } F.}$$

Remarque : Pour prouver que F est un sev de E, on peut aussi utiliser la « méthode basique » :

- $F \subset E$ par définition.
- Le polynôme nul appartient à F de façon évidente.
- Si P, Q sont dans F et si λ, μ sont deux réels, alors en posant $R = \lambda P + \mu Q$ on a :
  — $R(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$.
  — $R' = \lambda P' + \mu Q'$, donc $R'(0) = \lambda P'(0) + \mu Q'(0) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$.
  Conclusion : $R \in F$.

Exercice 8

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. - $0_E \in F$ et $0_E \in G$, car F et G sont des sev de E. On a donc $0_E \in F \cap G$.
   - Soient u, v dans $F \cap G$, λ, μ dans $\mathbb{K}$.

     u et v sont dans $F \cap G$, donc ils sont dans F. Or F est un sev de E, donc $\lambda u + \mu v \in F$; de même u et v sont dans G, qui est un sev de E, donc $\lambda u + \mu v \in G$. Par conséquent $\lambda u + \mu v \in F \cap G$.

   On en déduit que

   $$\boxed{F \cap G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

2. L'objectif de cette question est de montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.
   (a) Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$, qui est un sev de E ; et si $G \subset F$, alors $F \cup G = F$, qui est un sev de E. Donc dans tous les cas,

   $$\boxed{F \cup G \text{ est un sev de } E.}$$

(b) i. On a supposé que ($F \subset G$ ou $G \subset F$) était fausse, donc son contraire est vrai. Mais ce contraire s'écrit

$$F \not\subset G \text{ et } G \not\subset F.$$

Comme $F \not\subset G$, $\boxed{\text{il existe } f \in F \setminus G\,;}$ et comme $G \not\subset F$, $\boxed{\text{il existe } g \in G \setminus F.}$

ii. Soit $h = f + g$. On suppose $h \in G$.

Dans ce cas, puisque $g \in G$ et que G est un sev de E, on a

$$f = h - g \in G,$$

ce qui est absurde (cf question précédente).

Conclusion : $\boxed{h \notin G.}$

iii. Le raisonnement est le même que dans la question précédente : en supposant $h \in F$, on obtient $g = h - f \in F$, ce qui est absurde ; on a donc $\boxed{h \notin F.}$

iv. On reprend les éléments f et g des questions précédentes, ainsi que $h = f + g$.

f appartient à F, donc à $F \cup G$; de même g appartient à G, donc à $F \cup G$. Or leur somme $h = f + g$ n'appartient ni à F (qu° iii), ni à G (qu° ii), donc elle n'appartient pas à $F \cup G$. On en déduit que

$$\boxed{F \cup G \text{ n'est pas un sev de } E.}$$

3. On a prouvé dans la question 2.(a) que l'implication

$$(F \subset G \text{ ou } G \subset F) \implies (F \cup G \text{ sous-espace vectoriel de } E)$$

était vraie.

Dans la question 2.(b), on a prouvé que l'implication

$$(F \not\subset G \text{ et } G \not\subset F) \implies (F \cup G \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } E)$$

était vraie, donc sa contraposée l'est aussi :

$$(F \cup G \text{ sous-espace vectoriel de } E) \implies (F \subset G \text{ ou } G \subset F)\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{les propositions } (F \cup G \text{ sous-espace vectoriel de } E) \text{ et } (F \subset G \text{ ou } G \subset F) \text{ sont équivalentes.}}$$