Corrigé du devoir surveillé n°7

Exercice 1

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 7$ et la formule de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note
$$\mathscr{P}_n\ :\ 2 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$
   - $$\left.\begin{array}{ll} u_1 & = \sqrt{2+7} = 3 \\ 2 & \leq u_1 \leq u_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$
   - Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie, on a donc
$$2 \leq u_{k+1} \leq u_k.$$
On ajoute 2 :
$$4 \leq 2 + u_{k+1} \leq 2 + u_k.$$
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, donc
$$\begin{array}{c} \sqrt{4} \leq \sqrt{2+u_{k+1}} \leq \sqrt{2+u_k} \\ 2 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}. \end{array}$$
La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.
   - $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leq u_{n+1} \leq u_n.}$$
2. D'après la question 1 :
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2.

   Or toute suite décroissante minorée converge, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   On note ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite est minorée par 2, donc $\ell \geq 2$.

   On « passe à la limite » dans la formule de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n},$$

donc

$$\ell = \sqrt{2+\ell}.$$

La limite ℓ est donc une solution dans $[2,+\infty[$ de l'équation $x = \sqrt{2+x}$. On résout :

$$x = \sqrt{2+x} \iff x^2 = 2+x \iff x^2 - x - 2 = 0.$$

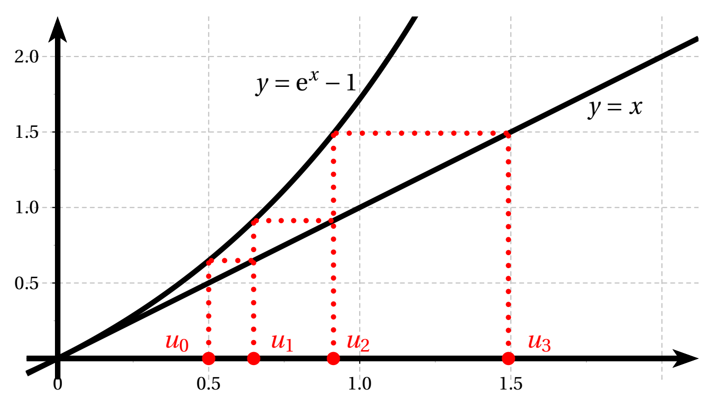
Avec la méthode habituelle (discriminant), on trouve deux racines : 2 et -1. Comme on résout dans $[2,+\infty[$, il n'y a qu'une solution : $x = 2$; on a donc $\ell = 2$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \lim u_n = 2.}$$

Exercice 2

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0,5$ et la formule de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 1.$$

1. 

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathscr{P}_n\ :\ 0.5 \le u_n \le u_{n+1}.$$

- $$\left.\begin{array}{ll} u_1 & = \mathrm{e}^{0.5} - 1 \approx 0.65 \\ 0.5 & \le u_0 \le u_1 \end{array}\right\} \implies \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie, on a donc

$$0.5 \le u_k \le u_{k+1}.$$

La fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$, donc

$$\mathrm{e}^{0.5} \le \mathrm{e}^{u_k} \le \mathrm{e}^{u_{k+1}}.$$

On retire 1 :

$$e^{0.5}-1 \le e^{u_k}-1 \le e^{u_{k+1}}-1$$
$$0.5 \le u_{k+1} \le u_{k+2}.$$

(puisque $e^{0.5}-1 \approx 0.65$). La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

- $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0.5 \le u_n \le u_{n+1}.}$$

3. D'après la question précédente, $0.5 \le u_n \le u_{n+1}$ pour tout entier naturel n, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Il y a donc deux alternatives :
   - ou bien elle est majorée, et alors elle converge vers une limite $\ell \ge 0.5$;
   - ou bien elle n'est pas majorée, et alors elle tend vers $+\infty$.

   Si nous étions dans la première situation, en passant à la limite dans la formule de récurrence, on aurait
   $$e^{\ell}-1=\ell.$$
   Donc d'après ce qui a été admis au début de l'énoncé, $\ell = 0$, ce qui est en contradiction avec le fait que $\ell \ge 0.5$.

   Conclusion : nous sommes dans la deuxième situation, c'est-à-dire que
   $$\boxed{u_n \to +\infty.}$$

Exercice 3

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :
$$\forall n,p \in \mathbb{N}^*\ :\ 0 \le u_{n+p} \le \frac{n+p}{np}.$$

1. En prenant $n = p$ on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$0 \le u_{n+n} \le \frac{n+n}{n\times n}$$
   $$0 \le u_{2n} \le \frac{2}{n}.$$
   Or $\lim \frac{2}{n} = \lim 0 = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes :
   $$\boxed{u_{2n} \to 0.}$$

2. En prenant $p = n+1$ on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$0 \le u_{n+n+1} \le \frac{n+(n+1)}{n\times(n+1)}$$
   $$0 \le u_{2n+1} \le \frac{2n+1}{n^2+n}.$$
   Or $\lim \frac{2n+1}{n^2+n} = \lim \frac{2n}{n^2} = \lim \frac{2}{n} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes :
   $$u_{2n+1} \to 0.$$
   Conclusion : les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers 0, donc d'après le cours
   $$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

Exercice 4

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

1. $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$, puisqu'on ajoute des nombres positifs.

   Pour tout entier naturel non nul n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n \times n!}\right) \\ &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n\times n!}. \end{aligned}$$

   Or $u_{n+1} - u_n = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}$, donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n\times n!} \\ &= \frac{n(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} + \frac{n}{n(n+1)\times(n+1)!} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)\times n!} \\ &= \frac{n^2+n}{n(n+1)(n+1)!} + \frac{n}{n(n+1)\times(n+1)!} - \frac{n^2+2n+1}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!}. \end{aligned}$$

   Conclusion : $v_{n+1} - v_n \leq 0$, donc

$$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et

$$v_n - u_n = \left(u_n + \frac{1}{n\times n!}\right) - u_n = \frac{1}{n\times n!} \to 0,$$

   donc

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes. Par conséquent, elles convergent vers la même limite.}}$$

   Remarque : La limite commune des deux suites est le nombre e. On le démontrera dans un exercice de la leçon n°20.

Exercice 5

1. On écrit la division euclidienne :

$$X^4 - 4X - 3 = (X-2)\,Q(X) + R(X),$$

où Q et R sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et $\deg(R) < 1$. Autrement dit :

$$X^4 - 4X - 3 = (X-2)\,Q(X) + a.$$

On prend $X = 2$:

$$\begin{aligned} 2^4 - 4\times 2 - 3 &= (2-2)Q(2) + a \\ 5 &= a \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le reste dans la division euclidienne de } X^4-4X-3 \text{ par } X-2 \text{ est le polynôme constant } R(X)=5.}$

2.
- $\boxed{\text{i est racine du polynôme } P(X) = X^4+2X^3-2X^2+2X-3}$, car

$$\mathrm{i}^4 + 2\mathrm{i}^3 - 2\mathrm{i}^2 + 2\mathrm{i} - 3 = 1 - 2\mathrm{i} + 2 + 2\mathrm{i} - 3 = 0.$$

- Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, le conjugué $-\mathrm{i}$ est aussi racine, donc d'après le cours $\boxed{(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i}) = X^2+1 \text{ divise } P.}$
- On pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{rl|l} & X^4+2X^3-2X^2+2X-3 & X^2+1 \\ \cline{3-3} - & X^4 \qquad\quad + X^2 & X^2+2X-3 \\ \cline{2-2} - & 2X^3-3X^2+2X-3 & \\ & 2X^3 \qquad\quad +2X & \\ \cline{2-2} - & -3X^2 \qquad -3 & \\ & -3X^2 \qquad -3 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

On en déduit : $P(X) = \left(X^2+1\right)\left(X^2+2X-3\right)$.
- Les racines de X^2+1 ne sont pas réelles : ce sont i et $-$i.
- À l'aide du discriminant, on voit que X^2+2X-3 a deux racines réelles : $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$.

On déduit de ce qui précède :

$\boxed{\text{La décomposition de } P(X) \text{ dans } \mathbb{R}[X] \text{ est } P(X) = \left(X^2+1\right)(X-1)(X+3).}$

$\boxed{\text{La décomposition de } P(X) \text{ dans } \mathbb{C}[X] \text{ est } P(X) = (X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})(X-1)(X+3).}$

3. On calcule $P(-1)$, $P'(-1)$ et $P''(-1)$:
- $P(-1) = (-1)^6 + 2\times(-1)^3 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$.
- $P'(X) = 6X^5 + 6X^2$, donc $P'(-1) = 6\times(-1)^5 + 6\times(-1)^2 = -6+6 = 0$.
- $P''(X) = 30X^4 + 12X$, donc $P''(-1) = 30\times(-1)^4 + 12\times(-1) = 30 - 12 = 18$.

Conclusion : $P(-1) = P'(-1) = 0$ et $P''(-1) \neq 0$, donc

$\boxed{-1 \text{ est racine de } P \text{ d'ordre de multiplicité 2.}}$