Corrigé du devoir surveillé n°6

Exercice 1

1. Il s'agit d'une 4-liste sans répétition d'un ensemble à 24 éléments. Il y a donc
$$\boxed{24 \times 23 \times 22 \times 21 \text{ tableaux possibles.}}$$
2. Il s'agit d'une 3-liste d'un ensemble à 24 éléments. Il y a donc
$$\boxed{24^3 \text{ tableaux possibles.}}$$
3. On choisit 6 hommes parmi 12 et 6 femmes parmi 12 pour constituer l'équipe jaune – les candidats restant feront partie de l'équipe rouge. Il y a donc
$$\boxed{\binom{12}{6} \times \binom{12}{6} \text{ équipes différentes possibles.}}$$
4. On écarte 3 jaunes parmi 11 (ou, ce qui revient au même, on en garde 8), donc il y a
$$\boxed{\binom{11}{3} = \binom{11}{8} \text{ équipes possibles.}}$$

Exercice 2

Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k \times k! &= \sum_{k=0}^{n} ((k+1)-1) \times k! \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+1) \times k! - \sum_{k=0}^{n} 1 \times k! \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+1)! - \sum_{k=0}^{n} k! \\
&= \left(\cancel{1!} + \cancel{2!} + \cancel{3!} + \cdots + \cancel{(n-1)!} + \cancel{n!} + (n+1)!\right) - \left(0! + \cancel{1!} + \cancel{2!} + \cdots + \cancel{(n-2)!} + \cancel{(n-1)!} + \cancel{n!}\right) && \text{(télescopage)} \\
&= (n+1)! - 0!
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1.}$$

Exercice 3

1.
$$\begin{cases} x-y+4z=1 & L_1 \\ 2x-y+\ \ z=-3 & L_2 \\ y-2z=10 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+4z=1 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ y-7z=-5 & L_2 \longleftarrow L_2-2L_1 \\ y-2z=10 & L_3 \longleftarrow L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+4z=1 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ y-7z=-5 & L_2 \longleftarrow L_2 \\ 5z=15 & L_3 \longleftarrow L_3-L_2 \end{cases}$$

On en déduit que l'unique solution est donnée par

$$z=\frac{15}{5}=3$$
$$y=-5+7z=-5+7\times 3=16$$
$$x=1+y-4z=1+16-4\times 3=5.$$

Autrement dit :

$$\boxed{S=\{(5,16,3)\}.}$$

Interprétation géométrique :
Les plans d'équations $x-y+4z=1$, $2x-y+z=-3$ et $y-2z=10$ se coupent au point de coordonnées $(5,16,3)$.

2.
$$\begin{cases} 3x-14y-10z=17 & L_1 \\ 5x+\ 2y-\ 4z=3 & L_2 \\ -x+\ 4y+\ 3z=-5 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+\ 4y+\ 3z=-5 & L_1 \longleftarrow L_3 \\ 5x+\ 2y-\ 4z=3 & L_2 \longleftarrow L_2 \\ 3x-14y-10z=17 & L_3 \longleftarrow L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+\ 4y+\ 3z=-5 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ 22y+11z=-22 & L_2 \longleftarrow L_2+5L_1 \\ -\ 2y-\ \ z=2 & L_3 \longleftarrow L_3+3L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+4y+3z=-5 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ 2y+\ \ z=-2 & L_2 \longleftarrow \frac{1}{11}L_2 \\ -2y-\ \ z=2 & L_3 \longleftarrow L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+4y+3z\ =-5 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ 2y+\ \ z\ =-2 & L_2 \longleftarrow L_2 \\ 0=0 & L_3 \longleftarrow L_3+L_2 \end{cases}$$

La dernière égalité est toujours vérifiée, donc le système se réécrit

$$\begin{cases} -x+4y+3z=-5 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ 2y+\ \ z=-2 & L_2 \longleftarrow L_2 \end{cases}$$

Dans ce cas, il y a une infinité de solutions : une fois choisie une valeur de y (plus simple que z) on a

$$z=-2-2y,$$

puis

$$x=5+4y+3z=5+4y+3(-2-2y)=-1-2y$$

Autrement dit, les solutions sont les triplets de la forme $(-1-2y,y,-2-2y)$, avec $y\in\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{S=\left\{(-1-2y,y,-2-2y)|z\in\mathbb{R}\right\}.}$$

Interprétation géométrique :
Les plans d'équations $3x-14y-10z=17$, $5x+2y-4z=3$ et $-x+4y+3z=-5$ se coupent suivant la droite passant par $A(-1;0;-2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Exercice 4

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ est inversible, car son déterminant est non nul :

$$\det A = 2 \times (-5) - (-3) \times 4 = 2.$$

D'après la formule du cours, son inverse est

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 & 1,5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

2. On présente la méthode par opération sur les lignes, mais il était aussi possible de résoudre un système :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 16 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array}$$

Conclusion : $\boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.}$

Exercice 5

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On calcule N^2 et N^3 :

$$\begin{array}{c|c|c} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^2 = 0_3.}$$

On en déduit $N^k = 0_3$ pour tout entier $k \geq 3$.

2. On note $I = I_3$ la matrice identité et $0 = 0_3$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On remarque que $A = N + I$. De plus, les matrices N et I commutent ($NI = IN = N$), donc d'après la formule du binôme de Newton, pour tout entier $n \geq 3$:

$$\begin{aligned}A^n = (N+I)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^k I = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^k \\ &= \binom{n}{0}N^0 + \binom{n}{1}N^1 + \binom{n}{2}N^2 + \underbrace{\binom{n}{3}N^3}_{=0} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n}N^n}_{=0} \\ &= I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 \\ &= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geq 3\ :\ A^n = \begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.}$$

Exercice 6

La trace d'une matrice $A = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, notée $\mathrm{tr}(A)$, est la somme des ses éléments diagonaux :

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22}.$$

1. Soient $A = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$ deux matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   - $A - B = \begin{pmatrix}a_{11}-b_{11}&a_{12}-b_{12}\\a_{21}-b_{21}&a_{22}-b_{22}\end{pmatrix}$, donc

     $$\mathrm{tr}(A-B) = (a_{11}-b_{11}) + (a_{22}-b_{22}) = a_{11}+a_{22}-(b_{11}+b_{22}) = \mathrm{tr}(A) - \mathrm{tr}(B).$$

     $$\boxed{\mathrm{tr}(A-B) = \mathrm{tr}(A) - \mathrm{tr}(B).}$$

   - On calcule (en partie) $A \times B$:

     $$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&\cdots\\\cdots&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}\end{array}$$

     On a donc

     $$\mathrm{tr}(AB) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}.$$

     On obtient le même résultat pour $\mathrm{tr}(BA)$, donc

     $$\boxed{\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).}$$

2. S'il existait deux matrices M, N dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

   $$MN - NM = I_2,$$

   alors en prenant la trace on aurait, d'après la question 1 :

   $$\begin{aligned}\mathrm{tr}(MN-NM) &= \mathrm{tr}(I_2)\\ \mathrm{tr}(MN) - \mathrm{tr}(NM) &= 2\\ 0 &= 2.\end{aligned}$$

   C'est absurde, donc

   $$\boxed{\text{il n'existe pas de matrices } M, N \text{ vérifiant } MN - NM = I_2.}$$