Corrigé du devoir surveillé n°5

Exercice 1

Soit $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}+1$.

1. Pour tout réel x :
$$f'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}.$$
Le signe de f' est évident. On en déduit les variations de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	2 ↘	1

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0+1 = 1$.

On en déduit que

$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } [0;+\infty[\text{ sur }]1;2].}$

2. Soit $y \in]1;2]$. On résout l'équation :
$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \mathrm{e}^{-2x}+1 = y \iff \mathrm{e}^{-2x} = y-1 \\ &\iff \ln\left(\mathrm{e}^{-2x}\right) = \ln(y-1) \iff -2x = \ln(y-1) \\ &\iff x = -\frac{1}{2}\ln(y-1). \end{aligned}$$
Conclusion : la bijection réciproque de f est
$$\boxed{f^{-1} :]1;2] \to [0;+\infty[,\ x \mapsto -\frac{1}{2}\ln(x-1).}$$

Exercice 2

On résout dans $]0;+\infty[$ l'équation
$$x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x.$$
Soit $x \in]0;+\infty[$. Par définition $a^b = \mathrm{e}^{b\ln a}$ pour tous $a>0$, $b \in \mathbb{R}$, donc on a les équivalences :
$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x &\iff \mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln x} = \mathrm{e}^{x\ln(\sqrt{x})} \iff \sqrt{x}\ln x = x\ln\left(\sqrt{x}\right) \iff \sqrt{x}\ln x - x\ln\left(\sqrt{x}\right) = 0 \\ &\iff \sqrt{x}\ln x - \frac{1}{2}x\ln x = 0 \iff \ln x\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\right) = 0 \iff \left(\ln x = 0 \text{ ou } \sqrt{x}-\frac{1}{2}x = 0\right). \end{aligned}$$
On résout séparément chacune des deux équations ci-dessus :
- $\ln x = 0 \iff \mathrm{e}^{\ln x} = \mathrm{e}^0 \iff x = 1$.
- $\sqrt{x}-\frac{1}{2}x = 0 \iff \sqrt{x} = \frac{1}{2}x \iff (\sqrt{x})^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \iff x = \frac{1}{4}x^2 \iff x - \frac{1}{4}x^2 = 0 \iff x\left(1-\frac{1}{4}x\right) = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } x = 4)$.

Or 0 est valeur interdite, donc $\boxed{\text{les solutions de l'équation } x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x \text{ sont 1 et 4.}}$

Exercice 3

On considère dans un r.o.n.d. de l'espace les points $A(1;2;3)$, $B(0;1;4)$ et $C(3;1;2)$. On détermine l'équation du plan (ABC) de deux façons différentes :

1. **En utilisant le produit vectoriel.**

   On calcule les coordonnées : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} \begin{matrix}x'\\y'\\z'\end{matrix}$. On pose $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. On a donc

   $$\vec{n}\begin{pmatrix}yz'-y'z\\x'z-xz'\\xy'-x'y\end{pmatrix} \qquad \vec{n}\begin{pmatrix}-1\times(-1)-(-1)\times 1\\2\times 1-(-1)\times(-1)\\-1\times(-1)-2\times(-1)\end{pmatrix} \qquad \vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}.$$

   On sait que $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC), donc

   $$(ABC): 2x+y+3z+d=0.$$

   On remplace par les coordonnées de $A(1;2;3)$:

   $$2\times 1+2+3\times 3+d=0 \Longrightarrow 13+d=0 \Longrightarrow d=-13.$$

   Conclusion :

   $$\boxed{(ABC): 2x+y+3z-13=0.}$$

2. **En utilisant le déterminant.**

   Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace. On a les équivalences :

   $$M\in P \iff \left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AM} \text{ coplanaires}\right) \iff \det\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AM}\right)=0 \iff \begin{vmatrix}-1 & 2 & x-1\\-1 & -1 & y-2\\1 & -1 & z-3\end{vmatrix}=0$$

   $$\iff (x-1)\times\begin{vmatrix}-1 & -1\\1 & -1\end{vmatrix}-(y-2)\times\begin{vmatrix}-1 & 2\\1 & -1\end{vmatrix}+(z-3)\times\begin{vmatrix}-1 & 2\\-1 & -1\end{vmatrix}=0$$

   $$\iff (x-1)\times 2-(y-2)\times(-1)+(z-3)\times 3=0 \iff 2x+y+3z-13=0.$$

   Conclusion :

   $$\boxed{(ABC): 2x+y+3z-13=0.}$$

Exercice 4

Dans un r.o.n.d. de l'espace, on considère la droite (d) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= 1+4t\\ y &= 1-t \quad ,\ t\in\mathbb{R}\\ z &= t\end{cases}$$

et les points $A(0;1;1)$ et $B(-2;3;2)$.

1. On vérifie que (d) est incluse dans (P) en « injectant » la représentation paramétrique de (d) dans l'équation de (P) :

$$\forall t \in \mathbb{R} : (1+4t)+2(1-t)-2(t)-3 = 1+4t+2-2t-2t-3=0,$$

donc $\boxed{(d) \subset (P).}$

Il y a plusieurs méthodes pour prouver que P est parallèle à (AB). On peut par exemple former la représentation paramétrique de (AB) et injecter comme ci-dessus. On démontre ainsi que (AB) ne coupe pas (P) ; ils sont donc parallèles.

Nous allons utiliser une méthode plus rapide : le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, qui est orthogonal à (P), est aussi orthogonal à (AB), puisque $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ et

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 1\times(-2)+2\times 2+(-2)\times 1 = 0.$$

On en déduit que

$$\boxed{(AB) \text{ est parallèle à } (P).}$$

2. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\begin{matrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{matrix}$ est orthogonal à (P), donc il dirige Δ. La représentation paramétrique de Δ est donc :

$$\begin{cases} x &= x_A + t\alpha \\ y &= y_A + t\beta\ ,\ t\in\mathbb{R} \\ z &= z_A + t\gamma \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{\begin{cases} x &= t \\ y &= 1+2t\ ,\ t\in\mathbb{R}. \\ z &= 1-2t \end{cases}}$$

3. Le point H est le point d'intersection de (P) et Δ, donc pour obtenir ses coordonnées, on injecte la représentation paramétrique de Δ dans l'équation de (P) et on résout :

$$(t)+2(1+2t)-2(1-2t)-3=0 \iff t+2+4t-2+4t-3=0 \iff 9t=3 \iff t=\frac{1}{3}.$$

On a donc :

$$\begin{cases} x_H &= \frac{1}{3} \\ y_H &= 1+2\times\frac{1}{3} = \frac{5}{3} \\ z_H &= 1-2\times\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

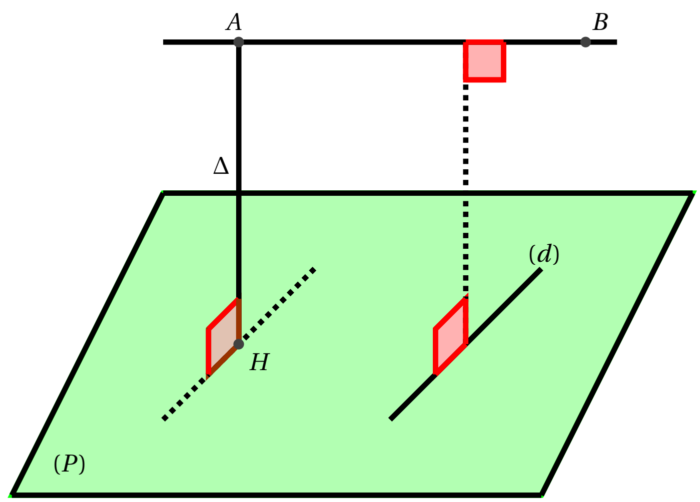
Conclusion :

$$\boxed{H\left(\frac{1}{3};\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right).}$$

4. La distance de la droite (d) à la droite (AB) est la même que la distance du point A au plan (P) (voir figure ci-dessous). Elle vaut donc

$$AH = \sqrt{\left(\frac{1}{3}-0\right)^2+\left(\frac{5}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1.$$

$$\boxed{\text{La distance de la droite } (d) \text{ à la droite } (AB) \text{ est égale à } 1.}$$



Exercice 5

1. Pour tout réel a tel que $\cos a \neq 0$:

$$\boxed{1+\tan^2 a = 1+\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)^2 = \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a}+\frac{\sin^2 a}{\cos a} = \frac{\cos^2 a+\sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}.}$$

2. Soit x un réel. D'après la question précédente, pour tout réel a tel que $\cos a \neq 0$:

$$\cos^2 a = \frac{1}{1+\tan^2 a}.$$

On peut appliquer cette formule avec $a = \arctan x$, puisque $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$, et donc $\cos(\arctan x) \neq 0$. On obtient alors :

$$\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

De plus, comme $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$, $\cos(\arctan x) > 0$ et donc

$$\boxed{\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.}$$

3. Pour tout réel x,

$$\cos^2(\arctan x)+\sin^2(\arctan x) = 1,$$

donc d'après la question précédente :

$$\frac{1}{1+x^2}+\sin^2(\arctan x) = 1.$$

On en déduit
$$\sin^2(\arctan x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}.$$
Et donc :
$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{ou} \qquad \sin(\arctan x) = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$
Enfin :
- si $x \geq 0$, alors $0 \leq \arctan x < \frac{\pi}{2}$, donc $\sin(\arctan x) \geq 0$.
- si $x \leq 0$, alors $-\frac{\pi}{2} < \arctan x \leq 0$, donc $\sin(\arctan x) \leq 0$.

Dans les deux cas, $\sin(\arctan x)$ est du même signe que x, donc pour tout réel x :
$$\boxed{\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.}$$

4. Soit $A = \arctan 2 + \arctan 3$.

(a) En utilisant l'une des formules d'addition et les questions précédentes, on obtient :
$$\begin{aligned}\cos A &= \cos(\arctan 2 + \arctan 3)\\ &= \cos(\arctan 2)\cos(\arctan 3) - \sin(\arctan 2)\sin(\arctan 3)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+2^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+3^2}} - \frac{2}{\sqrt{1+2^2}} \times \frac{3}{\sqrt{1+3^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}} - \frac{6}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}} = -\frac{5}{\sqrt{50}} = -\frac{5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$
$$\boxed{\cos A = -\frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

(b) La fonction arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, donc
- $1 < 2 \Longrightarrow \arctan 1 < \arctan 2 < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \frac{\pi}{4} < \arctan 2 < \frac{\pi}{2}$.
- $1 < 3 \Longrightarrow \arctan 1 < \arctan 3 < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \frac{\pi}{4} < \arctan 3 < \frac{\pi}{2}$.

On ajoute :
$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} < \arctan 2 + \arctan 3 < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2},$$
c'est-à-dire
$$\boxed{\frac{\pi}{2} < A < \pi.}$$
Or on sait que $\cos A = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\boxed{A = \frac{3\pi}{4}.}$