Corrigé du devoir surveillé n°4

Exercice 1

1.

$$\begin{array}{lll} & u_0 & = 1 \\ \text{avec } n=0 : & u_1 = 2\times u_0 + 0 - 1 = 2\times 1 - 1 & = 1 \\ \text{avec } n=1 : & u_2 = 2\times u_1 + 1 - 1 = 2\times 1 & = 2 \\ \text{avec } n=2 : & u_3 = 2\times u_2 + 2 - 1 = 2\times 2 + 1 & = 5 \end{array}$$

$$\boxed{u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 5.}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$u_n = 2^n - n.$$

- **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

$$\left.\begin{array}{ll} u_0 & = 1 \\ 2^0 - 0 & = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$

- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc

$$u_k = 2^k - k.$$

Objectif

Prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{k+1} = 2^{k+1} - (k+1).$$

On part de

$$u_k = 2^k - k.$$

On utilise la formule de récurrence et on remplace :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k + k - 1 && \text{(formule de récurrence pour la suite)} \\ &= 2\left(2^k - k\right) + k - 1 && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= 2\times 2^k - 2k + k - 1 && \text{(on développe)} \\ &= 2^{k+1} - k - 1 && \text{(calcul)} \\ &= 2^{k+1} - (k+1) \end{aligned}$$

La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - n.}$$

3. On pose $v_n = u_n + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + (n+1) && \text{(définition de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)} \\ &= (2u_n + n - 1) + (n+1) && \text{(formule de réc. pour } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)} \\ &= 2u_n + 2n && \text{(réduction)} \\ &= 2(u_n + n) && \text{(factorisation)} \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n$ donc

$$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } q = 2.}$$

(b) On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times 2^n.$$

Or $v_0 = u_0 + 0 = 1 + 0 = 1$, donc $v_n = 1 \times 2^n = 2^n$.

Enfin, $u_n = v_n - n = 2^n - n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n - n.}$$

Exercice 2

1. Il s'agit d'une somme télescopique. D'après une proposition du cours :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0 = (n+1)^3 - 0^3 = (n+1)^3.}$$

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$u_{k+1} - u_k = (k+1)^3 - k^3 = \cancel{k^3} + 3k^2 + 3k + 1^3 - \cancel{k^3} = 3k^2 + 3k + 1.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} - u_k = 3k^2 + 3k + 1.}$$

(b) Par linéarité de $\sum$ et d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=0}^{n} \left(3k^2 + 3k + 1\right) \\ &= 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= 3S_n + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \times 1.\end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = 3S_n + \frac{(3n+2)(n+1)}{2}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = 3S_n + \frac{(3n+2)(n+1)}{2}.}$$

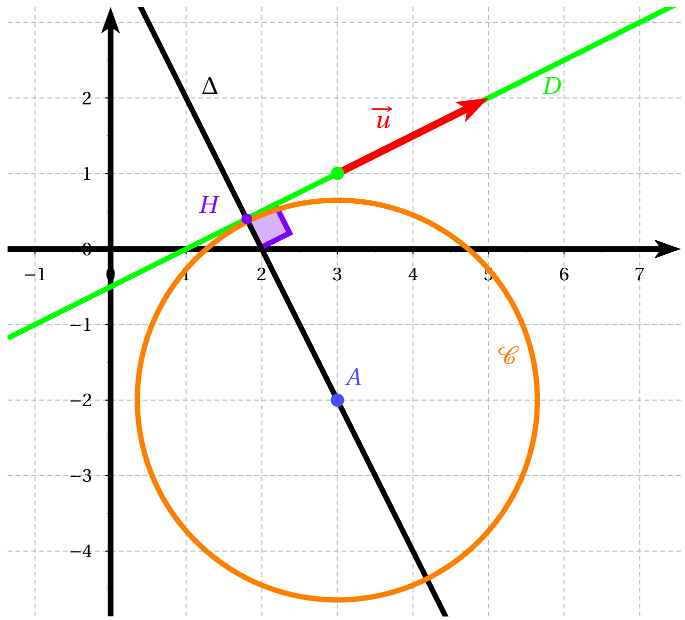
3. D'après les questions 1 et 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}3S_n + \frac{(3n+2)(n+1)}{2} &= (n+1)^3 \\ 3S_n &= (n+1)^3 - \frac{(3n+2)(n+1)}{2} \\ 3S_n &= \frac{2(n+1)^2(n+1)}{2} - \frac{(3n+2)(n+1)}{2} \\ 3S_n &= \frac{(n+1)\left[2\left(n^2+2n+1\right) - (3n+2)\right]}{2} \\ S_n &= \frac{(n+1)\left(2n^2+4n+2-3n-2\right)}{2 \times 3} \\ S_n &= \frac{(n+1)\left(2n^2+n\right)}{6}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}.}$$

Exercice 3

Soient $A(3;-2)$ et D la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x &= 3+2t \\ y &= 1+t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.



1. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ dirige D, et Δ est orthogonale à D, donc $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\begin{matrix}a\\b\end{matrix}$ est normal à Δ et l'on a
$$\Delta : 2x + 1y + c = 0.$$
De plus, Δ passe par $A(3;-2)$, donc
$$2\times 3 + 1\times(-2) + c = 0 \iff 4 + c = 0 \iff c = -4.$$
Conclusion : $\boxed{\Delta : 2x + y - 4 = 0.}$

2. Le point H est le point d'intersection de D et Δ, donc pour obtenir ses coordonnées, il suffit « d'injecter » la représentation paramétrique dans l'équation cartésienne de Δ, puis de résoudre :
$$\begin{aligned} 2x + y - 4 = 0 &\iff 2(3+2t) + (1+t) - 4 = 0 \\ &\iff 6 + 4t + 1 + t - 4 = 0 \\ &\iff 5t + 3 = 0 \\ &\iff t = -\frac{3}{5} = -0{,}6 \end{aligned}$$
On en déduit que les coordonnées de H sont :
$$\begin{cases} x_H &= 3 + 2\times(-0{,}6) = 3 - 1{,}2 = 1{,}8 \\ y_H &= 1 + t = 1 + (-0{,}6) = 0{,}4 \end{cases}$$
Conclusion : $\boxed{H(1{,}8\,;\,0{,}4).}$

3. On écrit sous forme canonique :
   - $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$;
   - $y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$.

   On a donc les équivalences :
$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 + 4y + 6 = 0 &\iff (x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 + 6 = 0 \\ &\iff (x-3)^2 + (y+2)^2 - 7 = 0 \\ &\iff (x-3)^2 + (y+2)^2 = 7. \end{aligned}$$
Conclusion : $\boxed{\mathscr{C} \text{ est le cercle de centre } A\text{, de rayon } R = \sqrt{7}.}$

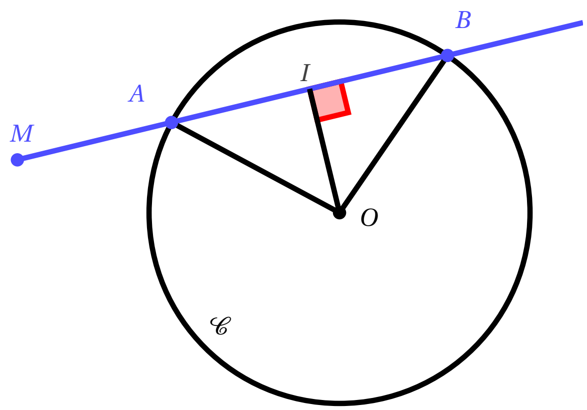
4. La distance de A à D est égale à la longueur AH. Elle vaut
$$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + \left(y_H - y_A\right)^2} = \sqrt{(1{,}8-3)^2 + (0{,}4-(-2))^2} = \sqrt{7{,}2}.$$
Comme $R < \sqrt{7{,}2}$, $\boxed{\text{la droite } D \text{ ne coupe pas le cercle } \mathscr{C}.}$

Remarques :

- On pouvait aussi injecter la représentation paramétrique de D dans l'équation de $\mathscr{C}$ et résoudre (2nd degré).
- Sur votre copie, la droite D est à moins d'1 mm du cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 4

1.



2. Les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires et de même sens, donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= \left\|\overrightarrow{MA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{MB}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\\ &= MA\times MB\times\underbrace{\cos 0}_{=1} = MA\times MB.\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MA\times MB.}$$

3. On utilise la question 2 et la bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}MA\times MB = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\\ &= \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}\\ &= \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\right)+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}.\end{aligned}$$

Or :

- $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MI} = MI^2$.
- I est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0}$ et

$$\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\right) = \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{0} = 0.$$

- Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires et de sens contraire et I est le milieu de $[AB]$, donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} &= \left\|\overrightarrow{IA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{IB}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)\\ &= IA\times IB\times\underbrace{\cos\pi}_{=-1} = -IA\times IA = -IA^2.\end{aligned}$$

En rassemblant les calculs qui précèdent, on obtient $MA\times MB = MI^2 - IA^2$.

Or I est le milieu de $[AB]$ et OAB est isocèle en O (car OA et OB sont deux rayons de $\mathscr{C}$), donc (OI) est la médiatrice de $[AB]$ et OIA est rectangle en I. Le théorème de Pythagore donne alors $MI^2 = MO^2 - OI^2$ et $IA^2 = R^2 - OI^2$.

Finalement :

$$MA\times MB = MI^2 - IA^2 = \left(MO^2 - OI^2\right) - \left(R^2 - OI^2\right) = MO^2 - \cancel{OI^2} - R^2 + \cancel{OI^2}.$$

$$\boxed{MA\times MB = MO^2 - R^2.}$$

Exercice 5

1. Par linéarité de $\sum$:

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}\times\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\times\frac{k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{2^{k+1}} \underset{\boxed{j=k+1}}{=} \sum_{j=1}^{n+1}\frac{j-1}{2^j}.$$

On utilise de nouveau la linéarité :

$$\frac{1}{2}S_n = \sum_{j=1}^{n+1}\frac{j}{2^j} - \sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{2^j}. \qquad (1)$$

Dans la somme qui définit S_n, le terme d'indice 0 est nul ($\frac{0}{2^0}=0$), donc

$$\sum_{j=1}^{n+1}\frac{j}{2^j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{2^j}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=S_n+\frac{n+1}{2^{n+1}}.$$

Donc en remplaçant dans (1) :

$$\boxed{\frac{1}{2}S_n=S_n+\frac{n+1}{2^{n+1}}-\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{2^j}.}$$

2. On calcule $\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{2^j}$ en utilisant la linéarité de $\sum$ et la formule sur les sommes géométriques :

$$\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{2^j}=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{j-1}}=\frac{1}{2}\times\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{2^{j-1}}=\underset{\boxed{k=j-1}}{=}\frac{1}{2}\times\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\times\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}}=1-\frac{1}{2^{n+1}}.$$

(On peut aussi, plus simplement, écrire la somme en extension et mettre $\frac{1}{2}$ en facteur, ou encore ajouter et retrancher le « terme manquant » 1.)

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n+1}=1-\frac{1}{2^{n+1}}.}$$

Il suffit alors de remplacer dans la formule de la question 1 :

$$\frac{1}{2}S_n=S_n+\frac{n+1}{2^{n+1}}-\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{2^j}=S_n+\frac{n+1}{2^{n+1}}-\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$=S_n+\frac{n+1}{2^{n+1}}-1+\frac{1}{2^{n+1}}=S_n+\frac{n+2}{2^{n+1}}-1.$$

On en déduit :

$$1-\frac{n+2}{2^{n+1}}=S_n-\frac{1}{2}S_n\iff 1-\frac{n+2}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}S_n$$

$$\iff 2\left(1-\frac{n+2}{2^{n+1}}\right)=S_n\iff 2-\frac{2(n+2)}{2^{n+1}}=S_n$$

$$\boxed{S_n=2-\frac{n+2}{2^n}.}$$

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$S_n=2-\frac{n+2}{2^n}.$$

- **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

$$\left.\begin{aligned}S_0&=\sum_{k=0}^{0}\frac{k}{2^k}=\frac{0}{2^0}=0\\ 2-\frac{0+2}{2^0}&=2-2=0\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$

- **Hérédité.** Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ soit vraie. On a donc

$$S_n=2-\frac{n+2}{2^n}.$$

Objectif

Prouver que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire que

$$S_{n+1}=2-\frac{n+3}{2^{n+1}}.$$

On part de

$$S_n=2-\frac{n+2}{2^n}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}S_{n+1}&=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{k}{2^k} && \text{(définition de } S_{n+1})\\ &=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{2^k}+\frac{n+1}{2^{n+1}} && \text{(on met à part le dernier terme)}\\ &=2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}} && \text{(hypothèse de récurrence)}\\ &=2-\frac{2(n+2)}{2^{n+1}}+\frac{n+1}{2^{n+1}} && \text{(on réduit au même dénominateur)}\\ &=2-\frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+3}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ S_n=2-\frac{n+2}{2^n}.}$$