Corrigé du devoir surveillé n°3

Exercice 1

1. (a) On pose $r = |z_1|$ et $\theta = \arg(z_1)$. On a alors :
   - $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2} = 2$,
   - $$\left.\begin{array}{ll}\cos\theta & = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta & = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$

   Conclusion : l'écriture de z_1 sous forme exponentielle est
   $$\boxed{z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}.}$$

   (b) Avec la même technique que dans la question (a), on obtient $\boxed{z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}.}$

   (c) $Z = z_1 \times z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}$.
   $$\boxed{Z = 4e^{i\frac{\pi}{12}}.}$$

2. D'après la question précédente :
   $$Z^6 = \left(4e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^6 = 4^6 e^{i\frac{6\pi}{12}} = 4\,096e^{i\frac{\pi}{2}}.$$
   L'écriture sous forme algébrique de Z est donc
   $$\boxed{Z = 4\,096i.}$$

Exercice 2

On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+4z+1-4i=0$.

- Le discriminant est
$$\Delta = 4^2 - 4\times 1\times(1-4i) = 16-4+16i = 12+16i.$$
- On cherche une racine carrée de Δ sous la forme $\delta = a+ib$. On a nécessairement :

D'une part,
$$\begin{aligned}\delta^2 &= \Delta \\ (a+ib)^2 &= 12+16i \\ a^2-b^2+2abi &= 12+16i \\ a^2-b^2 &= 12 \text{ et } 2ab = 16\end{aligned}$$

D'autre part,
$$\begin{aligned}|\delta^2| &= |\Delta| \\ |\delta|^2 &= |12+16i| \\ |a+ib|^2 &= \sqrt{12^2+16^2} \\ \sqrt{a^2+b^2}^2 &= \sqrt{400} \\ a^2+b^2 &= 20.\end{aligned}$$

- On obtient le système :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 12 \\ a^2 + b^2 = 20 \\ 2ab = 16 \end{cases}$$

On ajoute les deux 1res lignes :

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + a^2 + b^2 &= 12 + 20 \\ 2a^2 &= 32 \\ a^2 &= 16. \end{aligned}$$

Il y a donc deux possibilités : $a = 4$ ou $a = -4$.

— Si $a = 4$, comme $2ab = 16$, on obtient $b = \dfrac{16}{2a} = \dfrac{16}{8} = 2$;

— Si $a = -4$, on obtient $b = \dfrac{16}{2a} = \dfrac{16}{-8} = -2$.

- D'après ce qui précède, il y a au plus deux racines carrées :

$$4 + 2\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad -4 - 2\mathrm{i}.$$

Or le cours nous dit qu'il existe exactement deux racines carrées, donc il est certain que $4 + 2\mathrm{i}$ et $-4 - 2\mathrm{i}$ sont **les** racines carrées de Δ (la synthèse est inutile).
- On choisit l'une des deux racines carrées, par exemple $\delta = 4 + 2\mathrm{i}$.
Les solutions de l'équation $z^2 + 4z + 1 - 4\mathrm{i} = 0$ sont donc

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{-4 - (4 + 2\mathrm{i})}{2 \times 1} = \frac{-8 - 2\mathrm{i}}{2} = -4 - \mathrm{i}, \\ z_2 &= \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-4 + (4 + 2\mathrm{i})}{2 \times 1} = \frac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}. \end{aligned}$$

$$\boxed{S = \{-4 - \mathrm{i}\ ;\ \mathrm{i}\}.}$$

Exercice 3

Soit x un nombre réel.

1. Formules d'Euler :

$$\boxed{\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \qquad , \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.}$$

2. D'après les formules d'Euler :
   -
$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^2 = \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^2 + 2 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^2}{2^2} = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2} + \frac{1}{2} = \cos(2x) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$
   -
$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2 = \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^2 - 2 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^2}{(2\mathrm{i})^2} = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{-4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{-4} + \frac{-2}{-4} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2} + \frac{1}{2} = -\cos(2x) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'après les deux calculs qui précèdent :

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = \cos(2x) + \frac{1}{2} - \cos(2x) + \frac{1}{2} = 1.}$$

Exercice 4

On considère sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y' + 3y = \mathrm{e}^{2x}.$$

1. D'après le cours, les solutions de $(H)\ :\ y' + 3y = 0$ sont les fonctions

$$\boxed{y : x \mapsto C\mathrm{e}^{-3x} \qquad (C \in \mathbb{R}).}$$

2. On cherche à présent une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_P(x) = \alpha \mathrm{e}^{2x}.$$

On a $y_P'(x) = 2\alpha\mathrm{e}^{2x}$, donc

$$\begin{aligned} y_P \text{ solution de } (E) &\iff y_P' + 3y_P = \mathrm{e}^{2x} \\ &\iff 2\alpha\mathrm{e}^{2x} + 3\alpha\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x} \\ &\iff 5\alpha\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x} \\ &\iff \alpha = \frac{1}{5} \qquad (\text{car } \mathrm{e}^{2x} \neq 0). \end{aligned}$$

Conclusion : une solution particulière de (E) est

$$\boxed{y_P : x \mapsto \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}\,;}$$

et d'après le cours, la solution générale de (E) est

$$\boxed{y : x \mapsto C\mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}.}$$

3. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &\iff C\mathrm{e}^{-3\times 0} + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2\times 0} = 1 \\ &\iff C + \frac{1}{5} = 1 \\ &\iff C = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Conclusion : l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$ est

$$\boxed{y : x \mapsto \frac{4}{5}\mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}.}$$

Exercice 5

1. On cherche les solutions réelles de l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' - 4y' + 4y = 8$.

   L'équation homogène associée (H) a pour équation caractéristique

$$r^2 - 4r + 4 = 0.$$

   En utilisant le discriminant, on trouve une solution « double » : $r_0 = 2$. Donc d'après le cours, les solutions de (H) sont les fonctions

$$y : x \mapsto (Ax + B)\mathrm{e}^{2x} \qquad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}).$$

   De plus, il est clair que la fonction constante $y_P = 2$ est une solution particulière de (E). Donc d'après le cours, les solutions de (E) sont les fonctions

$$\boxed{y : x \mapsto (Ax + B)\mathrm{e}^{2x} + 2 \qquad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}).}$$

2. Soit $y : x \mapsto (Ax + B)\mathrm{e}^{2x} + 2$.

On utilise la formule pour la dérivée d'un produit, avec

$$\begin{aligned} u(x) &= Ax+B \quad , \quad & v(x) &= e^{2x} \\ u'(x) &= A \quad , \quad & v'(x) &= 2e^{2x}. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} y'(x) &= u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x) \\ &= A\times e^{2x} + (Ax+B)\times \left(2e^{2x}\right) \\ &= (A+2Ax+2B)e^{2x} \end{aligned}$$

On a donc les équivalences :

$$\begin{cases} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (A\times 0+B)\,e^0+2 &= 1 \\ (A+2A\times 0+2B)\,e^0 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} B+2 &= 1 \\ A+2B &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} B &= -1 \\ A &= 2 \end{cases}.$$

Conclusion : l'unique solution de (E) vérifiant les conditions initiales $y(0)=1$, $y'(0)=0$ est

$$\boxed{y : x \mapsto (2x-1)e^{2x}+2.}$$

Exercice 6

1. L'équation (E) se réécrit

$$\theta'' + \omega^2\theta = 0.$$

C'est une équation différentielle du 2d degré, dont l'équation caractéristique est

$$r^2+\omega^2 = 0.$$

Il y a deux racines évidentes dans $\mathbb{C}$: $r_1 = i\omega$, $r_2 = \overline{r_1} = -i\omega$. Donc d'après le cours, les solutions réelles de (E) sont les fonctions de la forme

$$\theta : x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x).$$

De plus, on nous dit que le pendule est lâché avec une vitesse nulle et un angle initial de $\frac{\pi}{6}$, donc $\theta'(0)=0$ et $\theta(0)=\frac{\pi}{6}$.
Or $\theta' : x \mapsto -A\omega\sin(\omega x) + B\omega\cos(\omega x)$, donc $\theta'(0) = B\omega$ et on a les équivalences :

$$\begin{cases} \theta(0) &= \frac{\pi}{6} \\ \theta'(0) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= \frac{\pi}{6} \\ B\omega &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= \frac{\pi}{6} \\ B &= 0 \end{cases}.$$

Conclusion : l'unique solution de (E) vérifiant les conditions initiales $\theta(0)=\frac{\pi}{6}$, $\theta'(0)=0$ est

$$\boxed{\theta : x \mapsto \frac{\pi}{6}\cos(\omega x).}$$

2. La période d'oscillation du pendule est égale à

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\ell}}} = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\ell}}} = \frac{2\pi\sqrt{\ell}}{\sqrt{g}},$$

donc pour que cette période soit égale à 2 s, on doit avoir :

$$\frac{2\pi\sqrt{\ell}}{\sqrt{g}} = 2 \implies \sqrt{\ell} = \frac{\cancel{2}\sqrt{g}}{\cancel{2}\pi} \implies \ell = \frac{g}{\pi^2}.$$

En prenant $g = 9{,}81$, on obtient

$$\boxed{\ell \approx 0{,}99.}$$