Corrigé du devoir surveillé n°2

Exercice 1

1. • Pour tout $x>0$:
$$e^x - x + 1 = e^x\left(1 - xe^{-x} + e^{-x}\right).$$
Or
$$\left.\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 & = 1 & \\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} & = 0 & \text{(par crois. comp.)} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} & = 0 & \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1 - xe^{-x} + e^{-x}\right) = 1,$$
donc
$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x & = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (1 - xe^{-x} + e^{-x}) & = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(e^x - x + 1\right) = +\infty.}$$
   • On utilise la limite d'une composée :
$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x + 1) & = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X & = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e^x - x + 1\right) = +\infty.}$$

2. On met $\sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = 2$ en facteur :
$$\begin{aligned} \sqrt{2}\cos(3x) + \sqrt{2}\sin(3x) = 2 &\iff 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(3x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(3x)\right) = 2 \\ &\iff \cos\frac{\pi}{4}\cos(3x) + \sin\frac{\pi}{4}\sin(3x) = 1 \\ &\iff \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ 3x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}. \end{aligned}$$
Conclusion : $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}.}$

3.
   - $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
   - $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
   - $\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\times\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

   Pour démontrer l'égalité $\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$, on fait un produit en croix :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\times\left(2-\sqrt{3}\right) &= 2\sqrt{6}-\sqrt{6}\times\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{3} = 2\sqrt{6}-\sqrt{18}+2\sqrt{2}-\sqrt{6}\\ &= 2\sqrt{6}-3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{6} = \sqrt{6}-\sqrt{2}.\end{aligned}$$

   On en déduit : $\boxed{\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3}.}$

4.
   - $\forall x\in\mathbb{R},\ f(-x) = 3\left(\sin(-x)\right)^2-1 = 3(-\sin x)^2-1 = 3\sin^2 x-1 = f(x)$, donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$
   - $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+\pi) = 3\left(\sin(x+\pi)\right)^2-1 = 3(-\sin x)^2-1 = 3\sin^2 x-1 = f(x)$, donc $\boxed{f \text{ est } \pi\text{-périodique.}}$

Exercice 2

1. $\boxed{-1 \text{ est une racine évidente}}$:

$$2\times(-1)^3-5\times(-1)^2-4\times(-1)+3 = -2-5+4+3 = 0.$$

   On peut donc écrire
$$\forall X\in\mathbb{R},\ 2X^3-5X^2-4X+3 = (X+1)f(X),$$
   où f est une fonction du 2nd degré.

   Pour déterminer f, on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{rr|l}
 & 2X^3-5X^2-4X+3 & X+1 \\ \cline{3-3}
- & 2X^3+2X^2 & 2X^2-7X+3 \\ \cline{2-2}
 & -7X^2-4X+3 & \\
- & -7X^2-7X & \\ \cline{2-2}
 & 3X+3 & \\
- & 3X+3 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

   On a donc :

$$\boxed{\forall X\in\mathbb{R},\ 2X^3-5X^2-4X+3 = (X+1)\left(2X^2-7X+3\right).}$$

2. On résout dans $[0;2\pi]$ l'équation

$$2\sin^3 x-5\sin^2 x-4\sin x+3 = 0.$$

On pose $X = \sin x$. L'équation se réécrit

$$2X^3 - 5X^2 - 4X + 3 = 0,$$

donc en utilisant la question 1 :

$$(X+1)\left(2X^2 - 7X + 3\right) = 0$$
$$\iff X + 1 = 0 \text{ ou } 2X^2 - 7X + 3 = 0.$$

En utilisant le discriminant, on obtient trois solutions : $X_1 = -1,\ X_2 = \frac{1}{2},\ X_3 = 3$.
Par conséquent :

$$2\sin^3 x - 5\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0 \iff \sin x = -1 \text{ ou } \sin x = \frac{1}{2} \text{ ou } \sin x = 3.$$

- La seule solution de l'équation $\sin x = -1$ dans $[0;2\pi]$ est $\frac{3\pi}{2}$.
- Les solutions de l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ dans $[0;2\pi]$ sont $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.
- L'équation $\sin x = 3$ n'a pas de solution dans $[0;2\pi]$, car un sinus est compris entre -1 et 1.

Conclusion :

$$\boxed{S = \left\{\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}.}$$

Exercice 3

1. Soit $u :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - 1 + 2\ln x$.

   (a) Pour tout $x \in]0;+\infty[$:
   $$u'(x) = 3x^2 + 2 \times \frac{1}{x}.$$
   Clairement u' est strictement positive. On a donc le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$	‖				
$u(x)$	‖	↗	0	↗	

   (b) $u(1) = 1^3 - 1 + 2\ln 1 = 1 - 1 + 2 \times 0 = 0$. On a donc le tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
$u(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2. Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x - \frac{\ln x}{x^2}$.

(a) On utilise la formule pour la dérivée d'un quotient, avec

$$u(x) = \ln x, \qquad v(x) = x^2,$$
$$u'(x) = \frac{1}{x}, \qquad v'(x) = 2x.$$

On obtient, pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{\left(x^2\right)^2} = 1 - \frac{x - \ln x \times 2x}{x^4} = 1 - \frac{\cancel{x}(1 - 2\ln x)}{\cancel{x} \times x^3}$$
$$= \frac{x^3}{x^3} - \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = \frac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \frac{u(x)}{x^3}.$$

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = \frac{u(x)}{x^3}.}$$

(b) On a étudié le signe de u dans la question 1.(b). On en déduit le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$u(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
x^3	0	$+$		$+$	
$f'(x) = \frac{u(x)}{x^3}$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(1) = 1 - \frac{\ln 1}{1^2} = 1 - \frac{0}{1} = 1.$$

(c) On commence par calculer $\lim\limits_{x \to 0,\ x>0} f(x)$. Pour cela on écrit $f(x) = x - \ln x \times \frac{1}{x^2}$.

On a

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x \to 0,\ x>0} \ln x & = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0,\ x>0} \frac{1}{x^2} & = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to 0,\ x>0} \ln x \times \frac{1}{x^2} = -\infty,$$

et donc

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to 0,\ x>0} x & = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \ln x \times \frac{1}{x^2} & = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} f(x) = +\infty.}$$

Ensuite on calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to+\infty} x & = +\infty & \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} & = 0 & \text{(par croissance comparée)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

(d) $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est minorée par 1, mais elle n'est pas majorée.}}$

$\boxed{\text{Elle n'est donc pas bornée.}}$

Exercice 4

1. On a $(\sin)' = \cos$, donc l'équation de (T) est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$
$$y = \cos(0)(x-0) + \sin(0)$$
$$y = 1x + 0$$
$$y = x$$

$$\boxed{(T) : y = x.}$$

2. Pour tout $x \in [0;\pi]$:

$$g'(x) = 1 - \cos x.$$

On résout dans $[0;\pi]$:

$$1 - \cos x = 0 \iff \cos x = 1 \iff x = 0.$$

On en déduit le signe de g' et les variations de g :

x	0		π
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	π

3. D'après le tableau de variations, le minimum de g est 0, donc

$$x - \sin x \geq 0$$

pour tout $x \in [0;\pi]$.

Autrement dit : $\boxed{\mathscr{C} \text{ est en-dessous de } (T) \text{ sur l'intervalle } [0;\pi]}$.

Exercice 5

1. On remarque que $4a = 2 \times 2a$ et on applique une première fois la formule de duplication du sinus :

$$\sin(4a) = \sin(2 \times 2a) = 2\sin(2a)\cos(2a).$$

On applique une deuxième fois la formule de duplication du sinus : $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$, donc

$$\begin{aligned}\sin(4a) &= 2 \times \sin(2a) \times \cos(2a)\\ &= 2 \times 2\sin a \cos a \times \cos(2a)\\ &= 4\sin a \cos a \cos(2a).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ \sin(4a) = 4\cos(2a)\cos(a)\sin(a).}$$

2. On remarque (c'est astucieux) que $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$, si bien que $\sin\frac{4\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5}$ (angles associés).

Ensuite on prend (et c'est une nouvelle fois astucieux) $a = \frac{\pi}{5}$ dans la formule de la question 1 :

$$\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

On peut simplifier, puisque $\sin\frac{4\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5}$ (qui est non nul) :

$$\cancel{\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)} = 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}.$$

On en déduit :

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}}.$$

On peut prolonger l'exercice : en utilisant la formule de duplication $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$, avec $a = \frac{\pi}{5}$, l'égalité que nous venons d'obtenir se réécrit (après un petit calcul)

$$8\cos^3\frac{\pi}{5} - 4\cos\frac{\pi}{5} - 1 = 0,$$

si bien que $\cos\frac{\pi}{5}$ est solution de l'équation $8X^3 - 4X - 1 = 0$.
Cette équation a une solution « évidente » : $X = \frac{1}{2}$, donc en faisant une division euclidienne on obtient la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{5}$:

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$