Corrigé du devoir surveillé n°11

Exercice 1

1. (a) On sait que :
   - $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o\left(x^3\right)$,
   - $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$.

   On en déduit, par produit :

$$\sqrt{1+x}\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \left[\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\right]_3+o\left(x^3\right)$$

$$\sqrt{1+x}\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4}-\frac{x^3}{8}+o\left(x^3\right).$$

$$\boxed{\sqrt{1+x}\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{24}+o\left(x^3\right).}$$

   (b) On sait que
   - $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$,
   - $\sin x \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$.

   On en déduit, par composition :

$$\mathrm{e}^{\sin x} \underset{x\to 0}{=} \left[1+\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3\right]_3+o\left(x^3\right)$$

$$\mathrm{e}^{\sin x} \underset{x\to 0}{=} 1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right).$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{\sin x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right).}$$

2. On sait que $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$, donc $1-\cos x \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$, puis

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}+o(1).$$

   On en déduit :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.}$$

3. On sait que $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+o\left(x^2\right)$, donc $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \underset{x\to 0}{=} 1+(-x)+(-x)^2+o\left(x^2\right)$. Autrement dit :

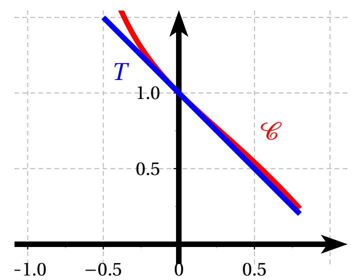
$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2+o\left(x^2\right).$$

On a donc :

$$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}x^2 \underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$$
$$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}x^2 \underset{x\to 0}{=} 1-x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$$
$$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}x^2 \underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2\left(\frac{1}{2}+o(1)\right).$$

Le terme $\frac{1}{2}+o(1)$ tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0, et x^2 est positif donc :

- la droite $T : y = 1-x$ est tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
- $\mathscr{C}$ est au-dessus de T au voisinage de 0.



Exercice 2

Soit $g : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P(X)+(1-X)P'(X)$.

1. Pour tous P, Q dans $\mathbb{R}_3[X]$, pour tous réels λ, μ :

$$\begin{aligned} g(\lambda P+\mu Q) &= (\lambda P+\mu Q)(X)+(1-X)(\lambda P+\mu Q)'(X) = \lambda P(X)+\mu Q(X)+(1-X)\lambda P'(X)+(1-X)\mu Q'(X) \\ &= \lambda\left(P(X)+(1-X)P'(X)\right)+\mu\left(Q(X)+(1-X)Q'(X)\right) = \lambda g(P)+\mu g(Q). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'application } g \text{ est linéaire.}}$$

2. Soit $P(X) = aX^3+bX^2+cX+d$ un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$\begin{aligned} g(P) = P(X)+(1-X)P'(X) &= aX^3+bX^2+cX+d+(1-X)\left(3aX^2+2bX+c\right) \\ &= aX^3+bX^2+cX+d+3aX^2+2bX+c-3aX^3-2bX^2-cX \\ &= -2aX^3+(-b+3a)X^2+2bX+c+d. \end{aligned}$$

$$\boxed{g(P) = -2aX^3+(-b+3a)X^2+2bX+c+d.}$$

3. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$P \in \operatorname{Ker}(g) \iff g(P)=0 \iff -2aX^3+(-b+3a)X^2+2bX+c+d=0 \iff \begin{cases} -2a & =0 \\ -b+3a & =0 \\ 2b & =0 \\ c+d & =0 \end{cases}$$
$$\iff a=0,\ b=0,\ d=-c \iff P(X) = cX-c = c(X-1).$$

Conclusion :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Vect}(X-1).}$$

4. Le noyau de g est de dimension 1, donc d'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned}\dim(\mathbb{R}_3[X]) &= \dim\left(\operatorname{Ker}(g)\right)+\dim\left(\operatorname{Im}(g)\right)\\ 4 &= 1+\dim\left(\operatorname{Im}(g)\right)\\ 3 &= \dim\left(\operatorname{Im}(g)\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le rang de } g \text{ est égal à 3.}}$$

5. On obtient immédiatement grâce à la question 2.(a) :

$$\boxed{g(1)=1 \quad , \quad g\left(X^2\right)=-X^2+2X \quad , \quad g\left(X^3\right)=-2X^3+3X^2.}$$

On sait que $\dim\left(\operatorname{Im}(g)\right)=3$. Par ailleurs, $\operatorname{Im}(g)$ contient la famille $\mathscr{F}=\left(1,-X^2+2X,-2X^3+3X^2\right)$, qui est de rang 3, car c'est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés. On en déduit :

$$\left.\begin{array}{ll}\dim\left(\operatorname{Im}(g)\right) & =\dim(\operatorname{Vect}(\mathscr{F}))=3\\ \operatorname{Vect}(\mathscr{F}) & \subset \operatorname{Im}(g)\end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{Im}(g)=\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$$

Conclusion :

$$\boxed{\operatorname{Im}(g)=\operatorname{Vect}\left(1,-X^2+2X,-2X^3+3X^2\right).}$$

Exercice 3

1. X suit la loi uniforme sur $\{1;2;\ldots;n\}$, donc
   - $X(\Omega)=[\![1,n]\!]$,
   - $\forall k\in X(\Omega),\ P(X=k)=\frac{1}{n}$.

   On a donc
$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{n}k\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

   Conclusion :
$$\boxed{E(X)=\frac{n+1}{2}.}$$

2. D'après le théorème de transfert
$$E\left(X^2\right)=\sum_{k=1}^{n}k^2P(X=k)=\sum_{k=1}^{n}k^2\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

   Donc d'après la formule de Koenig-Huygens :
$$\begin{aligned}V(X)=E\left(X^2\right)-(E(X))^2&=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{2n^2+2n+n+1}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}\\ &=\frac{2n^2+2n+n+1}{6}-\frac{n^2+2n+1}{4}=\frac{2\left(2n^2+2n+n+1\right)}{12}-\frac{3\left(n^2+2n+1\right)}{12}\\ &=\frac{4n^2+4n+2n+2-3n^2-6n-3}{12}=\frac{n^2-1}{12}.\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{E\left(X^2\right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \qquad , \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.}$$

Exercice 4

1. On répète 250 épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $p = 0.02$, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(250, 0.02).}$
2.
   - $P(A) = P(X = 5) = \binom{250}{5} \times 0.02^5 \times 0.98^{245} \approx 0,177.$
   - $P(B) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{250}{0} \times 0.02^0 \times 0.98^{250} = 1 - 0.98^{250} \approx 0,994.$

   $$\boxed{P(A) \approx 0,177 \qquad , \qquad P(B) \approx 0,994.}$$

3. X clients payent le menu végétarien, donc $250 - X$ clients payent le menu avec viande. Le coût total des repas de l'ensemble des clients est donc

   $$\boxed{Y = 9 \times X + 12 \times (250 - X) = 9X + 3\,000 - 12X = -3X + 3\,000.}$$

   Or $X \hookrightarrow \mathscr{B}(250, 0.02)$, donc $E(X) = 250 \times 0.02 = 5$; et par linéarité de l'espérance

   $$E(Y) = E(-3X + 3\,000) = -3E(X) + 3\,000 = -3 \times 5 + 3\,000 = 2\,985.$$

   Conclusion :

   $$\boxed{E(X) = 2\,985.}$$

4. On note Z le nombre de végétariens parmi les 20 000 clients. On répète 20 000 épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $p = 0.02$, donc $Z \hookrightarrow \mathscr{B}(20\,000, 0.02)$. Par ailleurs

   $$E(Z) = 20\,000 \times 0.02 = 400 \qquad \text{et} \qquad V(Z) = 20\,000 \times 0.02 \times 0.98 = 392.$$

   La probabilité que le restaurateur n'ait pas suffisamment de menus végétariens pour ses clients est

   $$P(C) = P(Z \geq 501) = P(Z - 400 \geq 501 - 400) = P(Z - 400 \geq 101).$$

   Or l'événement $(Z - 400 \geq 101)$ est inclus dans (ou implique) $(|Z - 400| \geq 101)$, donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev donne :

   $$P(C) = P(Z - 400 \geq 101) \leq P(|Z - 400| \geq 101) \leq \frac{V(Z)}{101^2} = \frac{392}{10\,201}.$$

   Conclusion :

   $$\boxed{P(C) \leq 0,039.}$$