Corrigé du devoir surveillé n°10

Exercice 1

1. On écrit $I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}(\ln x)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x$ pour reconnaître la formule $u' u^{\alpha}$, avec $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$I = \left[\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{2}{3}(\underbrace{\ln \mathrm{e}}_{=1})^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(\underbrace{\ln 1}_{=0})^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \qquad \boxed{I = \frac{2}{3}.}$$

2. On calcule $K = \int_0^1 2t \arctan t \,\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par parties : on pose

$$\begin{aligned} u'(t) &= 2t & v(t) &= \arctan t \\ u(t) &= t^2 & v'(t) &= \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Chacune des fonctions u et v est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, donc :

$$I = \int_0^1 \underbrace{2t}_{u'(t)} \times \underbrace{\arctan t}_{v(t)} \mathrm{d}t = \left[\underbrace{t^2}_{u(t)} \times \underbrace{\arctan t}_{v(t)}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{t^2}_{u(t)} \times \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{v'(t)} \mathrm{d}t = \arctan 1 - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 1\mathrm{d}t - [\arctan t]_0^1 = 1 - (\arctan 1 - \arctan 0) = 1 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{K = \frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1.}$$

3. On calcule $L = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$:

$$x = t^2 \qquad \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t.$$

On complète le tableau de valeurs :

$x = t^2$	0	4
t	0	2

Le théorème de changement de variable donne

$$L = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t^2}+1} \times 2t\mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{2t}{t+1}\mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{2t+2}{t+1}\mathrm{d}t - \int_0^2 \frac{2}{t+1}\mathrm{d}t = \int_0^2 2\mathrm{d}t - \int_0^2 \frac{2}{t+1}\mathrm{d}t.$$

Or $\int_0^2 2\mathrm{d}t = 2(2-0) = 4$ et $\int_0^2 \frac{2}{t+1}\mathrm{d}t = [2\ln(t+1)]_0^2 = 2\ln 3 - 2\ln 1 = 2\ln 3$, donc

$$\boxed{L = 4 - 2\ln 3.}$$

4. On note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$.

   On met $\frac{1}{n}$ en facteur pour faire apparaître une somme de Riemann :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

   Il s'agit d'une somme de Riemann, pour la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$, sur l'intervalle $[0,1]$.

   La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, donc

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.}$$

Exercice 2

On pose $I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \mathrm{d}x$ pour tout entier naturel n.

1.

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^0 \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} 1\mathrm{d}x = 1(\mathrm{e}-1) = \mathrm{e}-1, \\ I_1 &= \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^1 \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \mathrm{d}x = [x\ln x - x]_1^{\mathrm{e}} = (\mathrm{e}\ln\mathrm{e} - \mathrm{e}) - (1\ln 1 - 1) = \mathrm{e}-\mathrm{e}+1 = 1. \end{aligned}$$

$$\boxed{I_0 = \mathrm{e}-1 \qquad , \qquad I_1 = 1.}$$

2. (a) Si $1 \leq x \leq \mathrm{e}$, alors $0 \leq \ln x \leq 1$. Et comme $(\ln x)^n$ est positif :

$$\begin{aligned} 0 \times (\ln x)^n \leq \ln x \times (\ln x)^n &\leq 1 \times (\ln x)^n \\ 0 \leq (\ln x)^{n+1} &\leq (\ln x)^n. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [1,\mathrm{e}],\ \forall n \in \mathbb{N} :\ 0 \leq (\ln x)^{n+1} \leq (\ln x)^n.}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On intègre la double inégalité de la question précédente sur l'intervalle $[1,\mathrm{e}]$:

$$\begin{aligned} \int_1^{\mathrm{e}} 0\mathrm{d}x \leq \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^{n+1}\mathrm{d}x &\leq \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \mathrm{d}x \\ 0 \leq I_{n+1} &\leq I_n \end{aligned}$$

   Conclusion :

$$\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et minorée par } 0.}$$

3. (a) On part de $I_{n+1} = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^{n+1}\mathrm{d}x$, que l'on intègre par parties : on pose

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 & v(x) &= (\ln x)^{n+1} \\ u(x) &= x & v'(x) &= (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^n. \end{aligned}$$

Chacune des fonctions u et v est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, donc :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^{\mathrm{e}} 1 \times (\ln x)^{n+1} \mathrm{d}x = \left[x \times (\ln x)^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \cancel{x} \times (n+1) \times \frac{1}{\cancel{x}} \times (\ln x)^n \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}(\ln \mathrm{e})^{n+1} - 1(\ln 1)^{n+1} - (n+1)\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \mathrm{d}x = \mathrm{e} - (n+1) I_n. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1) I_n.}$$

(b) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.

Supposons $\ell \neq 0$. En passant à la limite dans l'égalité de la question précédente, on obtient

$$\text{« } \ell = -\infty \text{ »},$$

ce qui est absurde.
Conclusion :

$$\boxed{\lim I_n = 0.}$$

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x,y,z) = (x-y, x+y-z).$$

1. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in \operatorname{Ker}(f) &\iff f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff (x-y, x+y-z) = (0,0) \iff \begin{cases} x-y &= 0 \qquad {\color{red}L_1} \\ x+y-z &= 0 \qquad {\color{red}L_2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x-y &= 0 \qquad {\color{red}L_1 \leftarrow L_1} \\ 2y-z &= 0 \qquad {\color{red}L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \end{cases} \iff z = 2y \text{ et } x = y \iff u = (y,y,2y) = y(1,1,2). \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}((1,1,2)).}$$

2. Le noyau de f est de dimension 1, donc d'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned} \dim\left(\mathbb{R}^3\right) &= \dim\left(\operatorname{Ker}(f)\right) + \dim\left(\operatorname{Im}(f)\right) \\ 3 &= 1 + \dim\left(\operatorname{Im}(f)\right) \\ 2 &= \dim\left(\operatorname{Im}(f)\right). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\left.\begin{array}{ll} \dim\left(\operatorname{Im}(f)\right) & = \dim\left(\mathbb{R}^2\right) \\ \operatorname{Im}(f) & \subset \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2}$$

Exercice 4

Soit $g : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]\,,\ P \mapsto P(X) + (1-X)P'(X)$.

1. Pour tous P, Q dans $\mathbb{R}_3[X]$, pour tous réels λ, μ :

$$\begin{aligned} g(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X) + (1-X)(\lambda P + \mu Q)'(X) = \lambda P(X) + \mu Q(X) + (1-X)\lambda P'(X) + (1-X)\mu Q'(X) \\ &= \lambda\left(P(X) + (1-X)P'(X)\right) + \mu\left(Q(X) + (1-X)Q'(X)\right) = \lambda g(P) + \mu g(Q). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'application } g \text{ est linéaire.}}$$

2. Soit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$\begin{aligned} g(P) = P(X) + (1-X)P'(X) &= aX^3 + bX^2 + cX + d + (1-X)\left(3aX^2 + 2bX + c\right) \\ &= aX^3 + bX^2 + cX + d + 3aX^2 + 2bX + c - 3aX^3 - 2bX^2 - cX \\ &= -2aX^3 + (-b+3a)X^2 + 2bX + c + d. \end{aligned}$$

$$\boxed{g(P) = -2aX^3 + (-b+3a)X^2 + 2bX + c + d.}$$

3. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$P \in \mathrm{Ker}(g) \iff g(P) = 0 \iff -2aX^3 + (-b+3a)X^2 + 2bX + c + d = 0 \iff \begin{cases} -2a & = 0 \\ -b+3a & = 0 \\ 2b & = 0 \\ c+d & = 0 \end{cases}$$

$$\iff a = 0,\ b = 0,\ d = -c \iff P(X) = cX - c = c(X-1).$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}(X-1).}$$

4. Le noyau de g est de dimension 1, donc d'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned} \dim\left(\mathbb{R}_3[X]\right) &= \dim\left(\mathrm{Ker}(g)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}(g)\right) \\ 4 &= 1 + \dim\left(\mathrm{Im}(g)\right) \\ 3 &= \dim\left(\mathrm{Im}(g)\right). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le rang de } g \text{ est égal à 3.}}$$

5. On obtient immédiatement grâce à la question 2.(a) :

$$\boxed{g(1) = 1 \qquad , \qquad g\left(X^2\right) = -X^2 + 2X \qquad , \qquad g\left(X^3\right) = -2X^3 + 3X^2.}$$

On sait que $\dim\left(\mathrm{Im}(g)\right) = 3$. Par ailleurs, $\mathrm{Im}(g)$ contient la famille $\mathscr{F} = \left(1, -X^2 + 2X, -2X^3 + 3X^2\right)$, qui est de rang 3, car c'est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés. On en déduit :

$$\left.\begin{array}{ll} \dim\left(\mathrm{Im}(g)\right) & = \dim\left(\mathrm{Vect}(\mathscr{F})\right) = 3 \\ \mathrm{Vect}(\mathscr{F}) & \subset \mathrm{Im}(g) \end{array}\right\} \implies \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\left(1, -X^2 + 2X, -2X^3 + 3X^2\right).}$$

Exercice 5

Dans l'espace $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère le sous-espace

$$H = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

1. Soient f, g dans H, λ, μ deux réels. On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\lambda f + \mu g)\mathrm{d}t &= \lambda \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t && \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \lambda \times 0 + \mu \times 0 && \text{(car } f \text{ et } g \text{ sont dans } H\text{)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Donc $\lambda f + \mu g \in H$, et ainsi

$$\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

2. Soient f, g dans H, λ, μ deux réels. On a

$$u(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' = \lambda u(f) + \mu u(g),$$

   donc

$$\boxed{u \text{ est une application linéaire.}}$$

3. (a) La fonction nulle appartient à H, car c'est un sev de E. Réciproquement si f est constante égale à λ et si elle est dans H, alors par définition de H :

$$0 = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \lambda \mathrm{d}t = \lambda(1-0) = \lambda,$$

   donc $\lambda = 0$.
   Conclusion :

$$\boxed{\text{La seule fonction constante dans } H \text{ est la fonction nulle.}}$$

   (b) Soit $f \in H$ telle que $u(f) = 0$. Alors $f' = 0$, donc f est constante ; et d'après la question précédente, f est la fonction nulle. On en déduit que $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$, et donc que

$$\boxed{\text{l'application } u \text{ est injective.}}$$

4. (a) Les fonctions f telles que $u(f) = g$ – autrement dit $f' = g$ – sont les primitives de g qui appartiennent à H. On sait qu'elles sont de la forme $f : t \mapsto \frac{1}{3}t^3 + c$, où c est une constante.

   Reste à trouver c pour que f soit dans H :

$$f \in H \iff \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0 \iff \int_0^1 \left(\frac{1}{3}t^3 + c\right)\mathrm{d}t = 0 \iff \left[\frac{1}{12}t^4\right]_0^1 + c = 0 \iff \frac{1}{12} + c = 0 \iff c = -\frac{1}{12}.$$

   Conclusion :

$$\boxed{\text{La seule fonction } f \text{ telle que } u(f) \text{ soit la fonction } g : t \mapsto t^2 \text{ est } f : t \mapsto \tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{12}.}$$

   (b) On sait que u est une application linéaire injective. Pour prouver que c'est un isomorphisme, il reste à prouver que u est surjective.

   Soit donc $g \in E$. On sait (cf cours sur l'intégration) que g admet des primitives, comme par exemple $G : x \mapsto \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$. De plus, $G \in E$, car sa dérivée g appartient à E.

Posons alors $F = G - c$, où $c = \int_0^1 G(t)\mathrm{d}t$. La fonction F appartient à E et

$$\int_0^1 F(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (G(t)-c)\mathrm{d}t = \int_0^1 G(t)\mathrm{d}t - c = 0,$$

donc F appartient à H. De plus $u(F) = u(G-c) = (G-c)' = G' = g$, donc F est un antécédent de g par u.

Conclusion : toute fonction $g \in E$ admet un antécédent par u, donc u est surjective ; et donc

$$\boxed{u \text{ est un isomorphisme.}}$$

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = u$.

1. Soit $x \in E$. On écrit $x = x - u(x) + u(x)$ et on remarque que
   - $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$;
   - $x - u(x) \in \mathrm{Ker}(u)$, puisque $u(x - u(x)) \overset{\text{lin}}{=} u(x) - u^2(x) \overset{u^2=u}{=} u(x) - u(x) = 0_E$.

   Autrement dit on peut écrire :

   $$x = \underbrace{x - u(x)}_{\in \mathrm{Ker}(u)} + \underbrace{u(x)}_{\in \mathrm{Im}(u)}.$$

   Conclusion :

   $$\boxed{E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u).}$$

2. Soit $x \in E$. Si $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$, alors d'une part $u(x) = 0_E$, d'autre part $x = u(y)$, où $y \in E$.

   On a donc $0_E = u(x) = u(u(y)) = u^2(y) \overset{u^2=u}{=} u(y) = x$.
   Par conséquent $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$, et comme on sait déjà que $E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)$:

   $$\boxed{E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u).}$$