Corrigé du devoir surveillé n°1

1. On cherche d'abord les « valeurs interdites » :

$$x+3=0 \iff x=-3, \text{ donc on résout dans } \mathbb{R}\setminus\{-3\}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3\}$:

$$\begin{aligned}
& x-3 &&= \frac{8x}{x+3} \\
\iff & (x-3)(x+3) &&= 8x \quad \text{(produit en croix)} \\
\iff & x^2-9 &&= 8x \quad \text{(identité remarquable n°3)} \\
\iff & x^2-8x-9 &&= 0
\end{aligned}$$

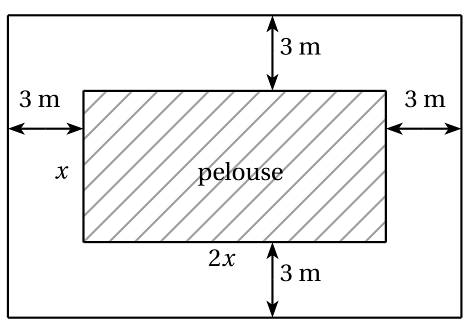
On aboutit à une équation du 2nd degré. On applique la méthode de résolution vue en cours :

- $a=1,\ b=-8,\ c=-9$.
- $\Delta = b^2-4ac = (-8)^2-4\times1\times(-9)=100$.
- $\Delta>0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8)-\sqrt{100}}{2\times1} = \frac{8-10}{2} = -1,$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8)+\sqrt{100}}{2} = \frac{8+10}{2} = 9.$$

$\boxed{\text{Conclusion : il y a deux solutions, } x=-1 \text{ et } x=9.}$

2. (a) Voici un schéma du terrain si l'on note x la largeur de la pelouse (donc la longueur est $2x$) :



(b) La longueur du terrain (en m) est

$$2x+3+3=2x+6,$$

sa largeur est

$$x+3+3=x+6.$$

Donc la surface du terrain (en m²) est

$$\text{longueur} \times \text{largeur} = (2x+6)\times(x+6).$$

Or on sait que cette surface vaut 360 m², donc

$$\boxed{(2x+6)\times(x+6)=360.}$$

(c) On résout l'équation obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned}
&(2x+6)\times(x+6) &&= 360\\
\Longleftrightarrow\ &2x\times x+2x\times 6+6\times x+6\times 6 &&= 360\\
\Longleftrightarrow\ &2x^2+12x+6x+36 &&= 360\\
\Longleftrightarrow\ &2x^2+18x+36-360 &&= 0\\
\Longleftrightarrow\ &2x^2+18x-324 &&= 0.
\end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation du second degré. Son discriminant est

$$\Delta = 18^2-4\times 2\times(-324)=2916.$$

$\Delta>0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-18-\sqrt{2916}}{2\times 2}=\frac{-18-54}{4}=\frac{-72}{4}=-18$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-18+\sqrt{2916}}{2\times 2}=\frac{-18+54}{4}=\frac{36}{4}=9.$$

Dans l'exercice, x désigne une longueur, donc x ne peut pas être négatif et seule la solution $x_2=9$ est valable.

$\boxed{\text{Conclusion : } x=9\text{, donc la longueur du terrain (en m) est } 2\times 9+3+3=24\text{, sa largeur est } 9+3+3=15.}$

3. (a) La proposition

$$\exists x\in\mathbb{R},\ x^2\geq 4x$$

est $\boxed{\text{VRAIE}}$.
Par exemple, $x=5$ convient, puisque $5^2=25$ est bien supérieur à $4\times 5=20$.

(b) La proposition

$$\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+1\geq 2x$$

est $\boxed{\text{VRAIE}}$.
En effet, pour tout réel x :

$$x^2+1-2x=x^2-2x+1=(x-1)^2.$$

Un carré est positif, donc $(x-1)^2\geq 0$, donc $x^2+1-2x\geq 0$; et donc $x^2+1\geq 2x$.

(c) La proposition

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 < 4 \implies x < 2$$

est $\boxed{\text{VRAIE}}$.

On démontre la contraposée : si $x \geq 2$, alors $x^2 \geq 4$, puisque deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

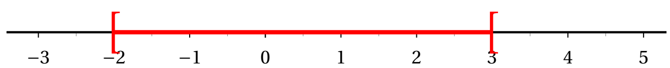
4. Les deux questions sont indépendantes.

(a) On résout chaque inéquation :

- $2x - 6 < 0 \iff 2x < 6 \iff x < \frac{6}{2} \iff x < 3$.
- $-3x - 6 \leq 0 \iff -3x \leq 6 \iff$ ⚠ $x \geq \frac{6}{-3} \iff x \geq -2$.

⚠ $-3 < 0$, donc on change le sens de l'inégalité.

$\boxed{\text{Conclusion : les réels qui vérifient les deux conditions à la fois sont ceux qui sont dans l'intervalle } [-2;3[.}$



(b) Soit $1 \leq t \leq 2$.

Deux nombres positifs sont rangés dans le même sens que leurs carrés, donc

$$1 \leq t^2 \leq 4.$$

On multiplie par 2, puis on ajoute 1 :

$$\begin{aligned} 2 \leq 2t^2 &\leq 8 \\ 3 \leq 2t^2 + 1 &\leq 9. \end{aligned}$$

Enfin, deux nombres strictement positifs sont rangés en sens contraire de leurs inverses, donc

$$\boxed{\frac{1}{3} \geq \frac{1}{2t^2+1} \geq \frac{1}{9}.}$$