Corrigé du devoir maison n°9

Exercice 1

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 7$ et la formule de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathscr{P}_n\ :\ 2 \le u_{n+1} \le u_n.$$

   - $$\left.\begin{array}{ll} u_1 & = \sqrt{2+7} = 3 \\ 2 & \le u_1 \le u_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$
   - Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie, on a donc

     $$2 \le u_{k+1} \le u_k.$$

     On ajoute 2 :

     $$4 \le 2 + u_{k+1} \le 2 + u_k.$$

     La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc

     $$\begin{array}{l} \sqrt{4} \le \sqrt{2+u_{k+1}} \le \sqrt{2+u_k} \\ 2 \le u_{k+2} \le u_{k+1}. \end{array}$$

     La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.
   - $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

     $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \le u_{n+1} \le u_n.}$$

2. D'après la question 1 :
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \le u_n$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \le u_n$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2.

   Or toute suite décroissante minorée converge, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   On note ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite est minorée par 2, donc $\ell \ge 2$.

   On « passe à la limite » dans la formule de récurrence :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n},$$

   donc

   $$\ell = \sqrt{2+\ell}.$$

   La limite ℓ est donc une solution dans $[2, +\infty[$ de l'équation $x = \sqrt{2+x}$. On résout :

   $$x = \sqrt{2+x} \iff x^2 = 2 + x \iff x^2 - x - 2 = 0.$$

   Avec la méthode habituelle (discriminant), on trouve deux racines : 2 et -1. Comme on résout dans $[2, +\infty[$, il n'y a qu'une solution : $x = 2$; on a donc $\ell = 2$.

   $$\boxed{\text{Conclusion : } \lim u_n = 2.}$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule :

- $u_{6n} = \lfloor \cos\left(\frac{6n\pi}{3}\right) \rfloor = \lfloor \cos(2n\pi) \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$, donc $u_{6n} \longrightarrow 1$.
- $u_{6n+3} = \lfloor \cos\left(\frac{(6n+3)\pi}{3}\right) \rfloor = \lfloor \cos(2n\pi + \pi) \rfloor = \lfloor -1 \rfloor = -1$, donc $u_{6n+3} \longrightarrow -1$.

Conclusion : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux suites extraites qui convergent vers des limites différentes, donc

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge.}}$$

Exercice 3

Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

1. Pour comparer les nombres positifs $2\sqrt{n}\sqrt{n+1}$ et $2n+1$, on compare leurs carrés :

$$\begin{aligned} \left(2\sqrt{n}\sqrt{n+1}\right)^2 &= 4n(n+1) = 4n^2 + 4n, \\ (2n+1)^2 &= 4n^2 + 4n + 1. \end{aligned}$$

   Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés et $4n^2 + 4n \le 4n^2 + 4n + 1$, donc

$$\boxed{2\sqrt{n}\sqrt{n+1} \le 2n+1.}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) \\ &= \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2\sqrt{n+1} \times \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{2\sqrt{n} \times \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{1 - 2(n+1) + 2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{-1 - 2n + 2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

   D'après la question 1, $-1 - 2n + 2\sqrt{n} \times \sqrt{n+1} \le 0$, donc $u_{n+1} - u_n \le 0$. Par conséquent :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n - u_n = \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}} - 2\sqrt{n}\right) = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} = 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right).$$

   Pour calculer la limite, on multiplie et on divise par $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$:

$$\sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \frac{\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}^2 - \sqrt{n+1}^2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{n - (n+1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}.$$

   On en déduit $\lim\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) = 0$; et donc $\lim(v_n - u_n) = 0$.

   Conclusion : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et $\lim(v_n - u_n) = 0$, donc

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ sont adjacentes.}}$$

4. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, donc elles convergent vers une même limite finie ℓ. En particulier,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \longrightarrow \ell,$$
donc comme $2\sqrt{n} \longrightarrow +\infty$:
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \longrightarrow +\infty.}$$

5. On sait que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \longrightarrow \ell \qquad \text{et} \qquad 2\sqrt{n} \longrightarrow +\infty,$$
donc
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} = o\left(2\sqrt{n}\right).$$
On en déduit
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}.}$$