Corrigé du devoir maison n°8

Exercice 1

1. Pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} g_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1g_n - 0,2b_n \\ 0,4g_n + 0,5b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,2 \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \times U_n.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n.}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} U_1 &= AU_0 \\ U_2 &= AU_1 = A(AU_0) = A^2U_0 \\ U_3 &= AU_2 = A\left(A^2U_0\right) = A^3U_0 \\ &\dots \end{aligned}$$

et plus généralement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = A^nU_0}$$

(en toute rigueur, il faudrait faire une démonstration par récurrence).

2. La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, car son déterminant est non nul :

$$\det P = 1 \times 2 - 1 \times 1 = 1.$$

D'après la formule du cours, son inverse est

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

3. On calcule $D = P^{-1}AP$:

$$\begin{array}{c|c|c} & \begin{pmatrix} 1,1 & -0,2 \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1,8 & -0,9 \\ -0,7 & 0,7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}.}$$

4. D'après la question précédente, $D = P^{-1}AP$, donc en multipliant à gauche et à droite :

$$\begin{aligned} {\color{red}P}D{\color{blue}P^{-1}} &= {\color{red}P}P^{-1}AP{\color{blue}P^{-1}} \\ PDP^{-1} &= \cancel{PP^{-1}}A\cancel{PP^{-1}} \\ PDP^{-1} &= A. \end{aligned}$$

Par produit télescopique (les termes d'une même couleur s'annulent deux à deux), pour tout entier $n \geq 1$:

$$A^n = \left(PDP^{-1}\right)^n = \underbrace{PDP^{-1} \times PDP^{-1} \times PDP^{-1} \times \cdots \times PDP^{-1}}_{n \text{ facteurs}} = PD^nP^{-1}$$

(on pourrait aussi démontrer la formule par récurrence).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = PD^nP^{-1}.}$$

5. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Comme D est diagonale,

$$D^n = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix}.$$

On prend ensuite la formule de la question précédente pour calculer A^n :

$$\begin{array}{c|c|c}
 & \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0,9^n & 0,7^n \\ 0,9^n & 2\times 0,7^n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2\times 0,9^n - 0,7^n & -0,9^n + 0,7^n \\ 2\times 0,9^n - 2\times 0,7^n & -0,9^n + 2\times 0,7^n \end{pmatrix}
\end{array}$$

On a donc $A^n = \begin{pmatrix} 2\times 0,9^n - 0,7^n & -0,9^n + 0,7^n \\ 2\times 0,9^n - 2\times 0,7^n & -0,9^n + 2\times 0,7^n \end{pmatrix}$, puis d'après la question 2 :

$$U_n = \begin{pmatrix} g_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^nU_0 = \begin{pmatrix} 2\times 0,9^n - 0,7^n & -0,9^n + 0,7^n \\ 2\times 0,9^n - 2\times 0,7^n & -0,9^n + 2\times 0,7^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1900\times 0,9^n - 900\times 0,7^n \\ 1900\times 0,9^n - 1800\times 0,7^n \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} g_n &= 1900\times 0,9^n - 900\times 0,7^n \\ b_n &= 1900\times 0,9^n - 1800\times 0,7^n. \end{cases}}$$

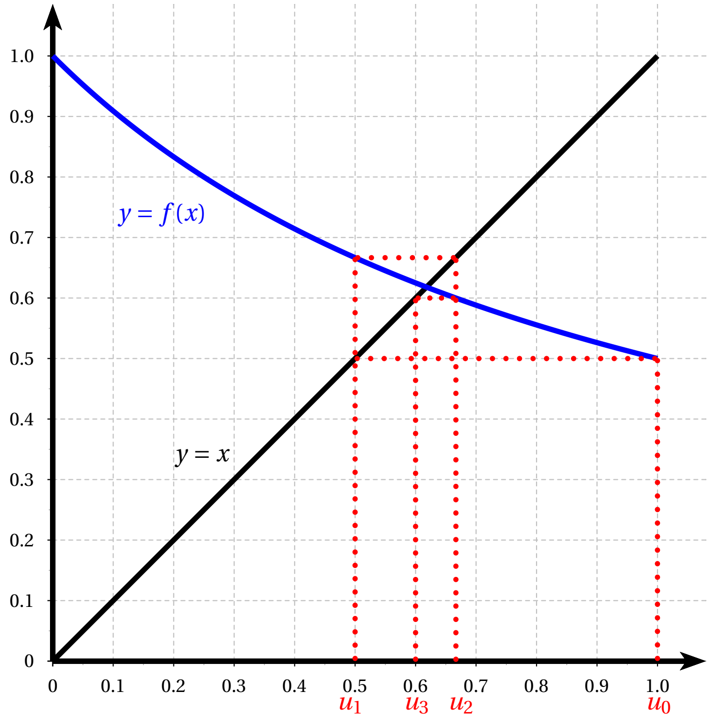
Enfin $|0,9| < 1$ et $|0,7| < 1$, donc $\lim 0,9^n = \lim 0,7^n = 0$. On en déduit

$$\boxed{\lim g_n = \lim b_n = 0.}$$

Les deux populations (gardons comme brochets) vont disparaître sur le long terme.

Exercice 2

1.



2. On résout l'équation :

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ \frac{1}{1+x} &= x \\ 1 &= x(x+1) \\ 0 &= x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant ($\Delta = 5$) et on trouve deux racines :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.}$

On en déduit, pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(\varphi) &= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+\varphi} \\ &= \frac{1(1+\varphi)}{(1+x)(1+\varphi)} - \frac{1(1+x)}{(1+x)(1+\varphi)} \\ &= \frac{1+\varphi-1-x}{(1+x)(1+\varphi)} \\ &= \frac{\varphi - x}{(1+x)(1+\varphi)} \end{aligned}$$

Or $x \geq 0$, donc $1 + x \geq 1$; et ainsi

$$(1+x)(1+\varphi) \geq 1+\varphi.$$

Deux nombres strictement positifs sont rangés en sens contraire de leurs inverses, donc

$$\frac{1}{(1+x)(1+\varphi)} \leq \frac{1}{1+\varphi}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \left|f(x) - f(\varphi)\right| &= \left|\frac{\varphi - x}{(1+x)(1+\varphi)}\right| \\ &= \frac{\left|\varphi - x\right|}{(1+x)(1+\varphi)} \\ &\leq \frac{\left|\varphi - x\right|}{1+\varphi} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \geq 0 : \left|f(x) - f(\varphi)\right| \leq \frac{|x-\varphi|}{1+\varphi}.}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note
$$\mathscr{P}_n \; : \; \left|u_n - \varphi\right| \leq \left(\frac{1}{1+\varphi}\right)^n \left|1-\varphi\right|.$$

   •
$$\left.\begin{array}{ll} \left|u_0 - \varphi\right| & = \left|1-\varphi\right| \\ \left(\frac{1}{1+\varphi}\right)^0 \left|1-\varphi\right| & = \left|1-\varphi\right| \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$

   • Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie, on a donc
$$\left|u_k - \varphi\right| \leq \left(\frac{1}{1+\varphi}\right)^k \left|1-\varphi\right|.$$

   On applique l'inégalité de la question précédente, en prenant $x = u_k$ et en utilisant le fait que $f(\varphi) = \varphi$ et que $f(u_k) = u_{k+1}$:
$$\begin{aligned} \left|u_{k+1} - \varphi\right| &= \left|f(u_k) - f(\varphi)\right| \\ &\leq \frac{|u_k - \varphi|}{1+\varphi} && \text{(d'après la question 2)} \\ &= |u_k - \varphi| \times \frac{1}{1+\varphi} \\ &\leq \left(\frac{1}{1+\varphi}\right)^k \left|1-\varphi\right| \times \frac{1}{1+\varphi} && \text{(par H.R.)} \\ &= \left(\frac{1}{1+\varphi}\right)^{k+1} \left|1-\varphi\right|. \end{aligned}$$

   La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

   • $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \; \left|u_n - \varphi\right| \leq \left(\frac{1}{1+\varphi}\right)^n \left|1-\varphi\right|.}$$

4. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \leq \left|u_n - \varphi\right| \leq \left(\frac{1}{1+\varphi}\right)^n \left|1-\varphi\right|.$$

   Or $\left|\frac{1}{1+\varphi}\right| < 1$, donc $\lim \left(\frac{1}{1+\varphi}\right)^n = 0$; et d'après le théorème des gendarmes :
$$\lim \left|u_n - \varphi\right| = 0.$$

   On en déduit :
$$\boxed{\lim u_n = \varphi.}$$