Corrigé du devoir maison n°7

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{e^x-1}{e^x+1}$.

1. On utilise la formule pour la dérivée d'un quotient avec

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x - 1, \qquad & v(x) &= e^x + 1, \\ u'(x) &= e^x, \qquad & v'(x) &= e^x. \end{aligned}$$

On obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{e^x \times (e^x+1) - (e^x-1) \times e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x \times e^x + e^x \times 1 - e^x \times e^x + 1 \times e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{\cancel{e^{2x}} + e^x - \cancel{e^{2x}} + e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}.$$

Une exponentielle est strictement positive, donc on obtient le tableau :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} (e^x - 1) &= 0 - 1 = -1 \\ \lim_{x\to-\infty} (e^x + 1) &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

3. On multiplie le numérateur et le dénominateur par e^{-x}. Pour tout réel x :

$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{(e^x-1)\times e^{-x}}{(e^x+1)\times e^{-x}} = \frac{e^{x-x} - e^{-x}}{e^{x-x} + e^{-x}} = \frac{e^0 - e^{-x}}{e^0 + e^{-x}} = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

On peut alors calculer la limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} (1 - e^{-x}) &= 1 - 0 = 1 \\ \lim_{x\to+\infty} (1 + e^{-x}) &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

D'après le tableau de variations, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de }]-\infty;+\infty[\text{ sur }]-1;1[.}$

4. Soit $y \in]-1;1[$. On résout l'équation :

$$f(x) = y \iff \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y \iff \left(e^x + 1\right) y = e^x - 1 \iff e^x y + y = e^x - 1 \iff e^x y - e^x = -1 - y$$
$$\iff e^x (y-1) = -1 - y \iff e^x = \frac{-1-y}{y-1} \iff e^x = \frac{1+y}{1-y} \iff \ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \iff x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Conclusion : la bijection réciproque de f est

$$\boxed{f^{-1} :]-1;1[\to \mathbb{R},\ y \mapsto \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).}$$

Exercice 2

On résout dans $]0;+\infty[$ l'équation
$$x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x.$$

Soit $x \in]0;+\infty[$. Par définition $a^b = e^{b\ln a}$ pour tous $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, donc on a les équivalences :

$$x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x \iff e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{x\ln(\sqrt{x})} \iff \sqrt{x}\ln x = x\ln\left(\sqrt{x}\right) \iff \sqrt{x}\ln x - x\ln\left(\sqrt{x}\right) = 0$$
$$\iff \sqrt{x}\ln x - \frac{1}{2}x\ln x = 0 \iff \ln x\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right) = 0 \iff \left(\ln x = 0 \text{ ou } \sqrt{x} - \frac{1}{2}x = 0\right).$$

On résout séparément chacune des deux équations ci-dessus :
- $\ln x = 0 \iff e^{\ln x} = e^0 \iff x = 1.$
- $\sqrt{x} - \frac{1}{2}x = 0 \iff \sqrt{x} = \frac{1}{2}x \iff (\sqrt{x})^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \iff x = \frac{1}{4}x^2 \iff x - \frac{1}{4}x^2 = 0 \iff x\left(1 - \frac{1}{4}x\right) = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } x = 4)$.

Or 0 est valeur interdite, donc $\boxed{\text{les solutions de l'équation } x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x \text{ sont 1 et 4.}}$

Exercice 3

Soit $A = \arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}$.

1. Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés. Or

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} = \frac{64}{100} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = \frac{75}{100},$$

donc $\frac{4}{5} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'un autre côté, $\frac{5}{13} = \frac{10}{26}$ et $\frac{1}{2} = \frac{13}{26}$, donc $\frac{5}{13} \leq \frac{1}{2}$.
La fonction arcsin étant strictement croissante sur $[0;1]$,

$$\boxed{\arcsin\frac{4}{5} \leq \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} \qquad \text{et} \qquad \arcsin\frac{5}{13} \leq \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.}$$

De même :

$$\boxed{\arcsin\frac{4}{5} \geq \arcsin 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \arcsin\frac{5}{13} \geq \arcsin 0 = 0.}$$

2. On a vu dans le cours que $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in [-1;1]$, donc en utilisant l'une des formules d'addition on obtient :

$$\begin{aligned}\sin A &= \sin\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}\right)\\ &= \sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right) + \cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\\ &= \frac{4}{5}\times\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\times\frac{5}{13}.\end{aligned}$$

Or $1-\left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1-\frac{25}{169} = \frac{144}{169}$, donc $\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}} = \frac{12}{13}$, et de même $\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$. On a donc :

$$\sin A = \frac{4}{5}\times\frac{12}{13} + \frac{3}{5}\times\frac{5}{13} = \frac{48}{65} + \frac{15}{65} = \frac{63}{65}.$$

Enfin $0 \leq A \leq \frac{\pi}{2}$, puisque d'après la question 1 :

- $A = \arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} \leq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$;
- $A = \arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} \geq 0 + 0 = 0$.

Conclusion : $\sin A = \frac{63}{65}$ et $0 \leq A \leq \frac{\pi}{2}$, donc

$$\boxed{A = \arcsin\frac{63}{65}.}$$

⚠ L'égalité $\sin A = \frac{63}{65}$ n'est pas suffisante pour pouvoir conclure que $A = \arcsin\frac{63}{65}$. L'encadrement de A est donc indispensable.