Corrigé du devoir maison n°6

Exercice 1

On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$, $v_0 = 8$ et les relations de récurrence :

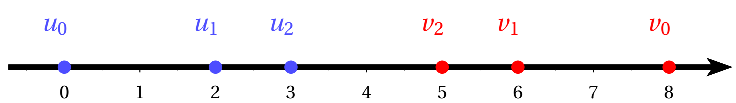
$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n \\ v_{n+1} &= \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.

$$u_0 = 0$$
$$u_1 = \frac{3}{4} \times u_0 + \frac{1}{4} \times v_0 = \frac{3}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 8 = 2$$
$$u_2 = \frac{3}{4} \times u_1 + \frac{1}{4} \times v_1 = \frac{3}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 6 = 3$$

$$v_0 = 8$$
$$v_1 = \frac{1}{4} \times u_0 + \frac{3}{4} \times v_0 = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{3}{4} \times 8 = 6$$
$$v_2 = \frac{1}{4} \times u_1 + \frac{3}{4} \times v_1 = \frac{1}{4} \times 2 + \frac{3}{4} \times 6 = 5$$



Remarque : Pour placer u_{n+1} et v_{n+1}, on coupe le segment $[u_n; v_n]$ en 4 ; et on place u_{n+1} au quart du segment, v_{n+1} aux trois-quarts du segment. Il y a clairement un lien avec le barycentre.

2. On pose $s_n = v_n + u_n$ et $d_n = v_n - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= v_{n+1} + u_{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n\right) + \left(\frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n\right) \\ &= \frac{4}{4}v_n + \frac{4}{4}u_n \\ &= v_n + u_n \\ &= s_n. \end{aligned}$$

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n$ donc $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Et comme $s_0 = v_0 + u_0 = 8 + 0 = 8$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 8 :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ s_n = 8.}$$

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n\right) - \left(\frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n\right) \\ &= \frac{2}{4}v_n - \frac{2}{4}u_n \\ &= \frac{1}{2}(v_n - u_n) \\ &= \frac{1}{2}d_n. \end{aligned}$$

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n$ donc

$$\boxed{(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } q = \tfrac{1}{2}.}$$

3. La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, et $d_0 = v_0 - u_0 = 8 - 0 = 8$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$d_n = d_0 \times q^n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
On sait par ailleurs que $s_n = 8$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Les relations
$$\begin{cases} s_n & = v_n + u_n \\ d_n & = v_n - u_n \end{cases}$$
se réécrivent donc
$$\begin{cases} 8 & = v_n + u_n \\ 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n & = v_n - u_n \end{cases}$$
On ajoute membre à membre :
$$\begin{aligned} 8 + 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n &= v_n + \cancel{u_n} + v_n - \cancel{u_n} \\ 8 + 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n &= 2v_n \\ \frac{8 + 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2} &= v_n \\ 4 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n &= v_n \end{aligned}$$
Enfin, comme $s_n = v_n + u_n$:
$$u_n = s_n - v_n = 8 - \left(4 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 8 - 4 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\boxed{v_n = 4 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} \qquad \boxed{u_n = 4 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Exercice 2

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + n - 1.$$

1.
$$\begin{array}{ll} & u_0 = 1 \\ \text{avec } n = 0 : & u_1 = 2 \times u_0 + 0 - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1 \\ \text{avec } n = 1 : & u_2 = 2 \times u_1 + 1 - 1 = 2 \times 1 = 2 \\ \text{avec } n = 2 : & u_3 = 2 \times u_2 + 2 - 1 = 2 \times 2 + 1 = 5 \end{array}$$
$$\boxed{u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 5.}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété
$$u_n = 2^n - n.$$
- **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
$$\left.\begin{array}{ll} u_0 & = 1 \\ 2^0 - 0 & = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$
- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc
$$u_k = 2^k - k.$$

Objectif

Prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{k+1} = 2^{k+1} - (k+1).$$

On part de

$$u_k = 2^k - k.$$

On utilise la formule de récurrence et on remplace :

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= 2u_k + k - 1 && \text{(formule de récurrence pour la suite)}\\
&= 2\left(2^k - k\right) + k - 1 && \text{(hypothèse de récurrence)}\\
&= 2 \times 2^k - 2k + k - 1 && \text{(on développe)}\\
&= 2^{k+1} - k - 1 && \text{(calcul)}\\
&= 2^{k+1} - (k+1)
\end{aligned}$$

La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.