Corrigé du devoir maison n°5

Soient $(d) : -3x + y - 1 = 0$ et $K(3;2)$. On note H le projeté orthogonal de K sur (d). On propose trois méthodes pour calculer la distance du point K à la droite (d) – c'est-à-dire la longueur HK.

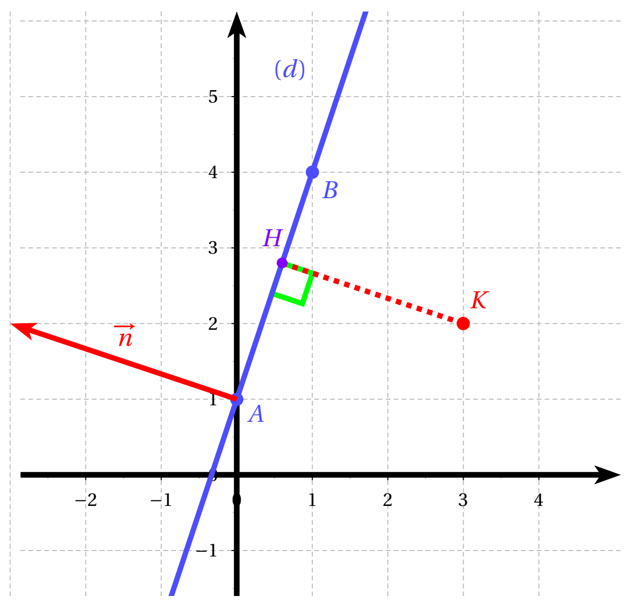
On sait que $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à (d).

Question préliminaire

La droite (d) passe par les points $A(0;1)$ et $B(1;4)$, car

$$-3 \times 0 + 1 - 1 = 0$$
$$-3 \times 1 + 4 - 1 = 0$$

On utilise ces deux points pour effectuer le tracé.



Méthode 1 : représentation paramétrique de droite

1. La droite (KH) est perpendiculaire à (d), donc $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ dirige (KH). Une représentation paramétrique de (KH) est donc

$$\begin{cases} x &= x_K + t \times (-3) \\ y &= y_K + t \times 1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\begin{cases} x &= 3 - 3t \\ y &= 2 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.}$$

2. Le point K est le point d'intersection de (KH) et (d), donc pour obtenir ses coordonnées, il suffit de remplacer les expressions de la représentation paramétrique dans l'équation cartésienne de (d), puis de résoudre :

$$\begin{aligned}-3x+y-1=0 &\iff -3(3-3t)+(2+t)-1=0\\ &\iff -9+9t+2+t-1=0\\ &\iff 10t-8=0\\ &\iff t=0,8\end{aligned}$$

On en déduit que les coordonnées de H sont $\begin{cases} x_H &= 3-3\times 0,8 = 0,6\\ y_H &= 2+t = 2+0,8 = 2,8\end{cases}$

$$\boxed{H(0,6\,;\,2,8).}$$

3. La distance du point K à la droite (d) est

$$\boxed{HK=\sqrt{(3-0,6)^2+(2-2,8)^2}=\sqrt{6,4}.}$$

Remarque : Cette longueur s'écrit également

$$\sqrt{6,4}=\sqrt{\frac{64}{10}}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{10}}=\frac{8}{\sqrt{10}}=\frac{8\sqrt{10}}{10}=\frac{4\sqrt{10}}{5}.$$

Méthode 2 : produit scalaire

1. On a déjà vu que $A\in(d)$ dans la question préliminaire. On a $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$, donc

$$\boxed{\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{n}=3\times(-3)+1\times 1=-8.}$$

2. On développe :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{n} &= \left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HK}\right)\cdot\overrightarrow{n}\\ &= \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}+\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{n}.\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}=0$, car $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{n}$, donc

$$\boxed{\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{n}=\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{n}.}$$

3. Les vecteurs $\overrightarrow{HK}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires et de sens contraire, donc $\left(\overrightarrow{HK},\overrightarrow{n}\right)=\pi$ et l'on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{n} &= \left\|\overrightarrow{HK}\right\|\times\|\overrightarrow{n}\|\times\cos\left(\overrightarrow{HK},\overrightarrow{n}\right)\\ &= HK\times\sqrt{(-3)^2+1^2}\times\cos\pi\\ &= HK\times\sqrt{10}\times(-1)\\ &= -HK\times\sqrt{10}.\end{aligned}$$

Donc d'après la question précédente :

$$\boxed{\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{n}=\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{n}=-HK\times\sqrt{10}.}$$

4. D'après les questions 1 et 3 :

$$-8=-HK\times\sqrt{10}.$$

La distance du point K à la droite (d) est donc

$$\boxed{HK=\frac{8}{\sqrt{10}}.}$$

Méthode 3 : étude de fonction

1. Le point M appartenant à la droite (d), on a $-3x_M + y_M - 1 = 0$, et ainsi

$$y_M = 3x_M + 1.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
KM &= \sqrt{(x_M - x_K)^2 + \left(y_M - y_K\right)^2} \\
&= \sqrt{(x_M - 3)^2 + (3x_M + 1 - 2)^2} \\
&= \sqrt{(x_M - 3)^2 + (3x_M - 1)^2} \\
&= \sqrt{x_M^2 - 2 \times x_M \times 3 + 3^2 + (3x_M)^2 - 2 \times 3x_M \times 1 + 1^2} \\
&= \sqrt{x_M^2 - 6x_M + 9 + 9x_M^2 - 6x_M + 1} \\
&= \sqrt{10x_M^2 - 12x_M + 10}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{KM = \sqrt{10x_M^2 - 12x_M + 10}.}$$

2. Le point H est le point de la droite (d) le plus proche du point K, donc la longueur KM calculée dans la question précédente est minimale lorsque $M = H$. Par conséquent, la longueur KH est égale au minimum de la fonction $x_M \mapsto \sqrt{10x_M^2 - 12x_M + 10}$.

Deux nombres positifs étant rangés dans le même ordre que leurs carrés, nous sommes ramenés à déterminer le minimum de la fonction[1] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 10x^2 - 12x + 10$.

Pour tout réel x, $f'(x) = 20x - 12$, d'où le tableau[2] :

x	$-\infty$		0.6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	6.4	$\nearrow$	

$$f(0,6) = 10 \times 0,6^2 - 12 \times 0,6 + 10 = 6,4.$$

$$\boxed{\text{Conclusion : la distance du point } K \text{ à la droite } (d) \text{ est } \sqrt{6,4}.}$$

1. On note la variable x plutôt que x_M par commodité.
2. $20x - 12 = 0 \iff x = \frac{12}{20} = 0,6$.