Corrigé du devoir maison n°4

Exercice 1

On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2+4z+1-4\mathrm{i}=0.$$

- Le discriminant est
$$\Delta=4^2-4\times1\times(1-4\mathrm{i})=16-4+16\mathrm{i}=12+16\mathrm{i}.$$
- On cherche une racine carrée de Δ sous la forme $\delta=a+\mathrm{i}b$. On a nécessairement :

D'une part,
$$\begin{aligned}\delta^2&=\Delta\\(a+\mathrm{i}b)^2&=12+16\mathrm{i}\\a^2-b^2+2ab\mathrm{i}&=12+16\mathrm{i}\\a^2-b^2&=12 \text{ et } 2ab=16\end{aligned}$$

D'autre part,
$$\begin{aligned}|\delta^2|&=|\Delta|\\|\delta|^2&=|12+16\mathrm{i}|\\|a+\mathrm{i}b|^2&=\sqrt{12^2+16^2}\\\sqrt{a^2+b^2}^2&=\sqrt{400}\\a^2+b^2&=20.\end{aligned}$$

- On obtient le système :
$$\begin{cases}a^2-b^2=12\\a^2+b^2=20\\2ab=16\end{cases}$$
On ajoute les deux 1res lignes :
$$\begin{aligned}a^2-b^2+a^2+b^2&=12+20\\2a^2&=32\\a^2&=16.\end{aligned}$$
Il y a donc deux possibilités : $a=4$ ou $a=-4$.
— Si $a=4$, comme $2ab=16$, on obtient $b=\dfrac{16}{2a}=\dfrac{16}{8}=2$;
— Si $a=-4$, on obtient $b=\dfrac{16}{2a}=\dfrac{16}{-8}=-2$.
- D'après ce qui précède, il y a au plus deux racines carrées :
$$4+2\mathrm{i}\qquad\text{et}\qquad-4-2\mathrm{i}.$$
Or le cours nous dit qu'il existe exactement deux racines carrées, donc il est certain que $4+2\mathrm{i}$ et $-4-2\mathrm{i}$ sont **les** racines carrées de Δ (la synthèse est inutile).

- On choisit l'une des deux racines carrées, par exemple $\delta = 4+2\mathrm{i}$.
  Les solutions de l'équation $z^2+4z+1-4\mathrm{i}=0$ sont donc

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{-4-(4+2\mathrm{i})}{2\times 1} = \frac{-8-2\mathrm{i}}{2} = -4-\mathrm{i},$$
$$z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{-4+(4+2\mathrm{i})}{2\times 1} = \frac{-4+4+2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}.$$

$$\boxed{S = \{-4-\mathrm{i}\,;\,\mathrm{i}\}.}$$

Exercice 2

1. Pour tous complexes a, b :

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)^3\times(a+b)\\ &= \left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)(a+b)\\ &= a^3\times a + a^3\times b + 3a^2b\times a + 3a^2b\times b + 3ab^2\times a + 3ab^2\times b + b^3\times a + b^3\times b\\ &= a^4 + a^3b + 3a^3b + 3a^2b^2 + 3a^2b^2 + 3ab^3 + ab^3 + b^4\\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

   Conclusion :

$$\boxed{(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.}$$

2. Soit $x\in\mathbb{R}$. D'après la formule d'Euler :

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}.$$

   Donc d'après la question 1 :

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^4\\ &= \frac{1}{2^4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^4\\ &= \frac{1}{16}\left[\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^4+4\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^3\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)+6\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^2\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^2+4\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^3+\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^4\right]\\ &= \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+4\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x-\mathrm{i}x}+6\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x-2\mathrm{i}x}+4\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+6\mathrm{e}^{0}+4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}\right)+\frac{4}{16}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)+\frac{6}{16}\\ &= \frac{1}{8}\times\frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2}+\frac{3}{8}\end{aligned}$$

   On utilise de nouveau la formule d'Euler pour conclure :

$$\boxed{\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}.}$$

Exercice 3

1. $|z-1| = 1 \iff IM = 1$, donc $\boxed{\mathscr{C} \text{ est le cercle de centre } I \text{ et de rayon } 1.}$

2. (a) Soit $z \in \mathscr{C} \setminus \{0\}$. On écrit sous forme exponentielle : $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, on a donc $\overline{z} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, puis

$$z' = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Par conséquent

$$\boxed{\arg(z') = \theta = \arg(z).}$$

On en déduit que $\boxed{\text{les points } O,\ M,\ M' \text{ sont alignés.}}$

(b) On a besoin des cinq résultats suivants :

(i) Pour tout complexe $z = a + \mathrm{i}b$:

$$\left|\overline{z}\right| = |a - \mathrm{i}b| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

(ii) $\overline{1} = 1$.

(iii) D'après le cours, pour tous complexes tels que l'opération ait un sens : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

(iv) A nouveau d'après le cours, pour tous complexes z, z' : $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$.

(v) Si $z \in \mathscr{C} \setminus \{0\}$, alors $|1 - z| = |z - 1| = 1$.

En tenant compte de ces résultats on obtient, pour tout $z \in \mathscr{C} \setminus \{0\}$:

- D'une part,

$$\left|z' - 1\right| = \left|\frac{1}{\overline{z}} - 1\right| = \left|\frac{1}{\overline{z}} - \frac{\overline{z}}{\overline{z}}\right| = \left|\frac{1 - \overline{z}}{\overline{z}}\right| = \frac{\left|1 - \overline{z}\right|}{\left|\overline{z}\right|} = \frac{\left|\overline{1} - \overline{z}\right|}{\left|\overline{z}\right|} = \frac{\left|\overline{1 - z}\right|}{\left|\overline{z}\right|} = \frac{|1 - z|}{|z|} = \frac{1}{|z|}.$$

- D'autre part,

$$\left|z'\right| = \left|\frac{1}{\overline{z}}\right| = \frac{|1|}{\left|\overline{z}\right|} = \frac{1}{|z|}.$$

On a donc bien

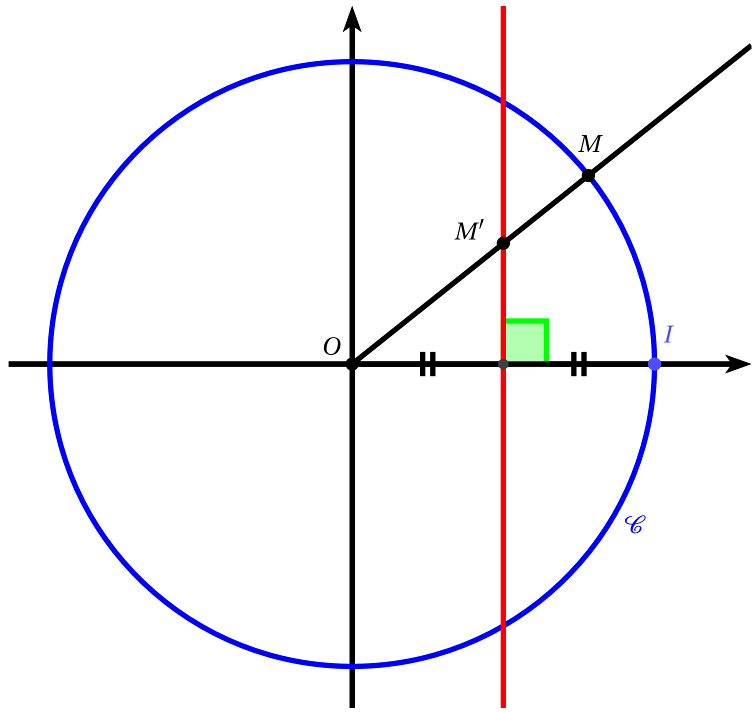
$$\boxed{\left|z' - 1\right| = \left|z'\right|.}$$

Cette égalité se réécrit $\left|z' - 1\right| = \left|z' - 0\right|$, donc avec les longueurs : $IM' = OM'$. On en déduit que

$$\boxed{M' \text{ appartient à la médiatrice de } [OI].}$$

(c) D'après les questions précédentes, si M est un point de $\mathscr{C}$ distinct de O, alors :
- O, M, M' sont alignés ;
- le point M' appartient à la médiatrice de $[OI]$.

Conclusion : $\boxed{M' \text{ est le point d'intersection de } (OM) \text{ avec la médiatrice de } [OI].}$



M
M'
O
I
$\mathscr{C}$