Corrigé du devoir maison n°3

1. Soit $k : [0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 e^{-x}$.

   (a) On utilise la formule pour la dérivée d'un produit, avec

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2, & v(x) &= e^{-x}, \\ u'(x) &= 2x, & v'(x) &= -e^{-x}. \end{aligned}$$

   On obtient, pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$\boxed{k'(x) = 2x \times e^{-x} + x^2 \times \left(-e^{-x}\right) = \left(2x - x^2\right) e^{-x}.}$$

   $2x - x^2 = x(2-x)$, donc les racines de $2x - x^2$ sont 0 et 2 et on a le tableau :

x	0		2		$+\infty$
$2x - x^2$	0	$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$k'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$k(x)$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	

$$k(0) = 0^2 e^{-0} = 0 \qquad k(2) = 2^2 e^{-2} = 4e^{-2}.$$

   (b) La fonction k est positive (car un carré et une exponentielle le sont) et son maximum est $4e^{-2}$, donc pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$0 \leq x^2 e^{-x} \leq 4e^{-2}.$$

   On divise par x (qui est strictement positif, donc le sens des inégalités ne change pas) :

$$\frac{0}{x} \leq \frac{x^2 e^{-x}}{x} \leq \frac{4e^{-2}}{x}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ 0 \leq x e^{-x} \leq \frac{4e^{-2}}{x}.}$$

   (c) On sait que $0 \leq xe^{-x} \leq \frac{4e^{-2}}{x}$ pour tout $x > 0$. Or $\lim_{x\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{4e^{-2}}{x} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0.}$$

(d) On utilise le théorème pour la limite d'une composée :

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = & +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} X\mathrm{e}^{-X} = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \ln x \times \mathrm{e}^{-\ln x} = 0.$$

Il ne reste plus qu'à écrire $\ln x \times \mathrm{e}^{-\ln x} = \ln x \times \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{\ln x}{x}$ pour pouvoir conclure :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.}$$

2. (a) On construit le tableau à partir de la dérivée :

x	0		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	e^{-1}	↘	0

(b) On étudie le signe de la dérivée seconde :

x	0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

La dérivée seconde change de signe en $a = 2$ uniquement, donc

$\boxed{\text{le point de coordonnées } (2; f(2)) \text{ est l'unique point d'inflexion.}}$

(c) L'équation de T_O est

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = 1(x-0) + 0$$
$$y = x$$

$$\boxed{T_O : y = x.}$$

L'équation de T_A est

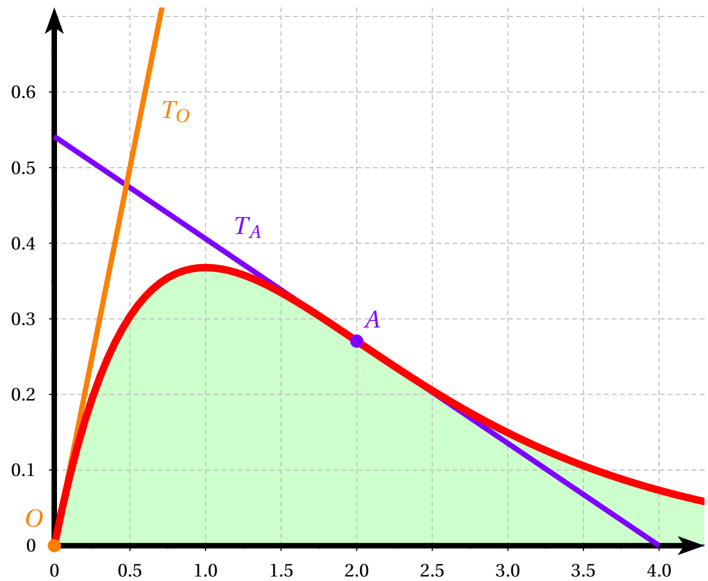
$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$
$$y = -\mathrm{e}^{-2}(x-2) + 2\mathrm{e}^{-2}$$
$$y = -\mathrm{e}^{-2}x + 4\mathrm{e}^{-2}$$

$$\boxed{T_A : y = -\mathrm{e}^{-2}x + 4\mathrm{e}^{-2}.}$$

(d) On cherche le point d'intersection de T_A avec l'axe des abscisses. Pour cela, on résout :

$$-e^{-2}x+4e^{-2}=0 \iff -e^{-2}x=-4e^{-2} \iff x=\frac{-4e^{-2}}{-e^{-2}} \iff x=4.$$

$\boxed{\text{La droite } T_A \text{ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées } (4;0).}$



3. (a) Soit $F : [0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto (ax+b)e^{-x}$.
On utilise la formule pour la dérivée d'un produit, avec

$$u(x)=ax+b, \qquad v(x)=e^{-x},$$
$$u'(x)=a, \qquad v'(x)=-e^{-x}.$$

On obtient, pour tout $x\in[0;+\infty[$:

$$F'(x)=a\times e^{-x}+(ax+b)\times\left(-e^{-x}\right)=(a-ax-b)\,e^{-x}=(-ax+(a-b))\,e^{-x}.$$

Or $\forall x>0,\ f(x)=xe^{-x}=(1x+0)e^{-x}$, donc pour que F soit une primitive de f, il suffit que

$$\begin{cases}-a &=1\\ \ \ a-b&=0\end{cases}.$$

Une solution évidente de ce système est $(a,b)=(-1,-1)$, donc

$\boxed{\text{une primitive de } f \text{ sur } [0;+\infty[\text{ est } F : x\mapsto(-x-1)e^{-x}.}$

(b) Soit $t>0$. On calcule à l'aide de la primitive de la question précédente :

$$I(t)=\int_0^t f(x)\mathrm{d}x=\left[(-x-1)e^{-x}\right]_0^t=(-t-1)e^{-t}-(-0-1)\,e^{-0}=-te^{-t}-e^{-t}+1.$$

$$\boxed{\forall t>0,\ I(t)=-te^{-t}-e^{-t}+1.}$$

On en déduit :

$$\left.\begin{array}{lll}\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t}= & 0 & \text{(par crois. comp.)}\\ \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}= & 0 & \end{array}\right\} \implies \boxed{\lim_{t\to+\infty} I(t)=-0-0+1=1.}$$

Il s'agit de l'aire du domaine situé entre l'axe des abscisses et la courbe de la fonction f, colorié en vert sur la figure – ce domaine allant jusqu'à l'infini.