Corrigé du devoir maison n°18

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On note

$$B_n^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

   (a) $\deg\left(t^k\right) = k$ et $\deg\left((1-t)^{n-k}\right) = n-k$, donc en utilisant la formule $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$ (et puisque $\binom{n}{k} \neq 0$) :

$$\boxed{\deg\left(B_n^k\right) = k + (n-k) = n.}$$

   (b) D'après la formule du binôme de Newton, pour tout $0 \leq t \leq 1$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} B_n^k(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = (t + (1-t))^n = 1^n = 1.}$$

2. (a) Si Z est une variable aléatoire à valeurs positives, alors $Z(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.
Donc $E(Z) = \sum_{z \in Z(\Omega)} \underbrace{z}_{\oplus} \underbrace{P(Z=z)}_{\oplus}$, qui est une somme de réels positifs, est positive :

$$\boxed{E(Z) \geq 0.}$$

   On suppose à présent que X, Y sont deux variables aléatoires telles que $X \leq Y$.
Dans ce cas $Y - X \geq 0$, donc $E(Y-X) \geq 0$ d'après la première partie de la question (en posant $Z = Y - X$) ; et donc $E(Y) - E(X) \geq 0$ par linéarité de l'espérance. On en déduit

$$\boxed{E(X) \leq E(Y).}$$

   (b) La formule de Koenig-Huygens dit que

$$\boxed{V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2.}$$

   Démonstration : on note $\mu = E(X)$ et on développe

$$V(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = E\left(X^2 - 2 \times X \times \mu + \mu^2\right).$$

   Par linéarité de l'espérance :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - 2\mu \underbrace{E(X)}_{=\mu} + E\left(\mu^2\right) = E\left(X^2\right) - 2\mu^2 + \mu^2 = E\left(X^2\right) - \mu^2.$$

   Autrement dit :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2.$$

   (c) On sait que $V(X) \geq 0$ (si on l'a oublié, c'est une conséquence de la question 2.(a), en posant $Z = (X - E(X))^2$). Donc d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$E\left(X^2\right) - (E(X))^2 \geq 0.$$

   On en déduit $(E(X))^2 \leq E\left(X^2\right)$, et comme deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées : $\sqrt{(E(X))^2} \leq \sqrt{E\left(X^2\right)}$. Autrement dit :

$$\boxed{|E(X)| \leq \sqrt{E\left(X^2\right)}.}$$

3. Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $0 \leq t \leq 1$ et S_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, t. On pose $X_n = \varphi\left(\frac{S_n}{n}\right) - \varphi(t)$.

   (a) D'après le cours :
$$\boxed{E(S_n) = nt \qquad , \qquad V(S_n) = nt(1-t).}$$

   (b) Par linéarité de l'espérance :
$$\boxed{E\left(\frac{S_n}{n} - t\right) = \frac{1}{n}E(S_n) - E(t) = \frac{1}{n} \times nt - t = 0.}$$
   On a aussi $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = t$, donc $E\left[\left(\frac{S_n}{n} - t\right)^2\right]$ est la variance de $\frac{S_n}{n}$. En utilisant la formule du cours $V(aX) = a^2V(X)$, on obtient :
$$\boxed{E\left[\left(\frac{S_n}{n} - t\right)^2\right] = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \times V(S_n) = \frac{1}{n^2} \times nt(1-t) = \frac{t(1-t)}{n}.}$$

   (c) La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$, donc φ' est continue sur $[0,1]$. On en déduit que φ' est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $0 \leq t \leq 1$:
$$\left|\varphi'(t)\right| \leq M.$$
   D'après l'inégalité des accroissements finis :
$$\boxed{\forall a, b \in [0,1], \qquad |\varphi(b) - \varphi(a)| \leq M|b-a|.}$$

   (d) La variable S_n est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, donc $0 \leq \frac{S_n}{n} \leq 1$. On a aussi $0 \leq t \leq 1$, donc d'après la question 3.(c) :
$$X_n^2 = \left(\varphi\left(\frac{S_n}{n}\right) - \varphi(t)\right)^2 \leq M^2\left(\frac{S_n}{n} - t\right)^2.$$
   Par croissance de l'espérance (question 2.(a)) et d'après la question 3.(b), on en déduit
$$E\left(X_n^2\right) \leq M^2 E\left[\left(\frac{S_n}{n} - t\right)^2\right] = M^2\frac{t(1-t)}{n}.$$
   En combinant cette inégalité avec celle de la question 2.(c), on obtient :
$$\boxed{|E(X_n)| \leq \sqrt{E\left(X_n^2\right)} \leq \sqrt{M^2\frac{t(1-t)}{n}} = \frac{M}{\sqrt{n}}\sqrt{t(1-t)}}.$$

   (e) La fonction $f : t \mapsto t(1-t) = t - t^2$ a pour dérivée $f' : t \mapsto 1 - 2t$. Elle a donc les variations :

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

   On en déduit que $0 \leq t(1-t) \leq \frac{1}{4}$, et donc $0 \leq \sqrt{t(1-t)} \leq \frac{1}{2}$ puis, grâce à la question précédente :
$$\boxed{|E(X_n)| \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}.}$$

(f) Par linéarité de l'espérance

$$E(X_n) = E\left(\varphi\left(\frac{S_n}{n}\right) - \varphi(t)\right) = E\left(\varphi\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - E\left(\varphi(t)\right) = E\left(\varphi\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - \varphi(t).$$

De plus $S_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$, donc d'après le théorème de transfert :

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k) - \varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k(t) - \varphi(t).$$

Finalement, grâce à la question 3.(e) :

$$\boxed{\left|\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k(t)\right| = |E(X_n)| \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}.}$$

(g) D'après la question précédente, pour tout $0 \leq t \leq 1$,

$$\left|\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k(t)\right| \leq \frac{M}{2\sqrt{n}},$$

donc si l'on pose $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k(t)$, alors P_n est un polynôme (car c'est une somme de polynômes) et

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left|\varphi(t) - P_n(t)\right| \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}$$

(le majorant est indépendant de t).
Enfin $\lim_{n \to +\infty} \frac{M}{2\sqrt{n}} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left|\varphi(t) - P_n(t)\right| = 0.}$$