Corrigé du devoir maison n°17

Exercice 1

1. On écrit, pour x proche de 0 :
$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 + (\cos x - 1)}.$$

On écrit les DL à l'ordre 4 en 0 :
- $\cos x - 1 \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right),$
- $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o\left(x^4\right).$

(Pour le 2e DL, on a utilisé $x \mapsto (1+x)^\alpha$, avec $\alpha = \frac{1}{2}$.)

On en déduit, par composition :
$$\sqrt{1+(\cos x - 1)} \underset{x\to 0}{=} \left[1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^3 - \frac{5}{128}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^4\right]_4 + o\left(x^4\right)$$
$$\sqrt{\cos x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{8} \times \frac{1}{4}x^4 + o\left(x^4\right)$$
$$\sqrt{\cos x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o\left(x^4\right)$$

Conclusion :
$$\boxed{\sqrt{\cos x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o\left(x^4\right).}$$

2. On écrit les DL à l'ordre 3 en 0 :
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right),$
- $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o\left(x^3\right).$

On en déduit, par produit :
$$\ln(1+x) \times \frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \left[\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \times \left(1 - x + x^2 - x^3\right)\right]_3 + o\left(x^3\right)$$
$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} \underset{x\to 0}{=} x - x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$$
$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} \underset{x\to 0}{=} x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o\left(x^3\right)$$

Conclusion :
$$\boxed{\frac{\ln(1+x)}{1+x} \underset{x\to 0}{=} x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o\left(x^3\right).}$$

3. Pour tout réel x :
$$\sin x = \sin\left(x - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Or
$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \underset{x\to\frac{\pi}{6}}{=} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3\right)$$

et

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \underset{x\to\frac{\pi}{6}}{=} 1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2+o\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3\right),$$

donc

$$\sin x \underset{x\to\frac{\pi}{6}}{=} \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3\right]+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2\right]+o\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3\right).$$

Conclusion :

$$\boxed{\sin x \underset{x\to\frac{\pi}{6}}{=} \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3+o\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3\right).}$$

Exercice 2

1. On réduit d'abord au même dénominateur : pour $x\neq 0$,

$$\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}=\frac{x}{x\,(e^x-1)}-\frac{e^x-1}{x\,(e^x-1)}=\frac{x-e^x+1}{x\,(e^x-1)}.$$

Puis on écrit les DL :

$$\begin{aligned}
x-e^x+1 &\underset{x\to 0}{=} x-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)+1+o\left(x^2\right)\\
x-e^x+1 &\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\\
x-e^x+1 &\underset{x\to 0}{=} x^2\left(-\frac{1}{2}+o\,(1)\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^x-1 &\underset{x\to 0}{=} x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\\
x\left(e^x-1\right) &\underset{x\to 0}{=} x^2+o\left(x^2\right)\\
x\left(e^x-1\right) &\underset{x\to 0}{=} x^2\,(1+o\,(1)).
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}=\frac{x-e^x+1}{x\,(e^x-1)} \underset{x\to 0}{=} \frac{\cancel{x^2}\left(-\frac{1}{2}+o\,(1)\right)}{\cancel{x^2}\,(1+o\,(1))},$$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2}.}$$

2. Pour tout réel x :

$$e^x-1-x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-1-x+o\left(x^3\right)=\frac{1}{2}x^2+x^3\left(\frac{1}{6}+o(1)\right).$$

Le terme $\frac{1}{6}+o(1)$ tend vers $\frac{1}{6}$ lorsque x tend vers 0, donc :

- la courbe $\mathscr{C} : y=e^x-1-x$ est tangente à la parabole $\mathscr{P} : y=\frac{1}{2}x^2$ au point d'abscisse 0 ;
- comme x^3 est du signe $\oplus$ sur $]0;+\infty[$ et du signe $\ominus$ sur $]-\infty;0[$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{P}$ à droite au voisinage de 0, en-dessous à gauche au voisinage de 0.