Corrigé du devoir maison n°16

1. (a) Pour tous réels a, b, pour tout entier naturel k :

$$\boxed{(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k-i}.}$$

(b) Soit k un entier naturel non nul. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{(X+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i 1^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i.}$$

(c) On considère les polynômes $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X^2$ et $P_3(X) = X^3$.

- $\boxed{\Phi(P_0)(X) = 1 - 1 = 0.}$
- $\boxed{\Phi(P_1)(X) = (X+1) - X = 1.}$
- $\boxed{\Phi(P_2)(X) = (X+1)^2 - X^2 = X^2 + 2X + 1 - X^2 = 2X + 1.}$
- $\boxed{\Phi(P_3)(X) = (X+1)^3 - X^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1.}$

(d)
- $\Phi^2(P_2)(X) = \Phi(\Phi(P_2)) = \Phi(2X+1) = 2(X+1) + 1 - (2X+1) = 2.$
- $\Phi^3(P_2)(X) = \Phi\left(\Phi^2(P_2)\right) = \Phi(2) = 2 - 2 = 0.$

$$\boxed{\Phi^2(P_2)(X) = 2 \qquad , \qquad \Phi^3(P_2)(X) = 0.}$$

(e) Prouver que Φ est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$, c'est prouver que Φ est linéaire et qu'il est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

On commence par la linéarité : pour tous polynômes P, Q de $\mathbb{R}_n[X]$, pour tous réels λ, μ :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - \lambda P(X) - \lambda Q(X)\\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X))\\ &= \lambda\Phi(P) + \mu\Phi(Q)\end{aligned}.$$

Conclusion : $\Phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\Phi(P) + \mu\Phi(Q)$, donc Φ est linéaire.

Par ailleurs, Φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$ d'après la question 1.(b), donc $\Phi(P) = P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ (puisque c'est un espace vectoriel).

Conclusion :

$$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

(f) Soit P un polynôme de degré k non nul :

$$P(X) = a_k X^k + a_{k-1} X^{k-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

Par linéarité de Φ :

$$\Phi(P) = a_k \Phi\left(X^k\right) + a_{k-1}\Phi\left(X^{k-1}\right) + \cdots + a_1\Phi(X) + \underbrace{a_0\Phi(1)}_{=0}.$$

D'après la question 1.(b), si $1 \leq j \leq k$,

$$\Phi\left(X^j\right) = (X+1)^j - X^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i - X^j = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} X^i,$$

donc $\Phi\left(X^j\right)$ est de degré $j-1$. Comme par ailleurs a_k est non nul,

$$\boxed{\Phi(P) \text{ est un polynôme de degré } k-1.}$$

(g) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Si $P \in \operatorname{Ker}(\Phi)$, alors $\Phi(P) = 0$, donc $P(X+1) = P(X)$.
On a donc $P(1) = P(0)$ (en prenant $X = 0$), $P(2) = P(1)$ (en prenant $X = 1$), $P(3) = P(2)$ (en prenant $X = 2$), etc. Par une récurrence immédiate, pour tout entier $n \geq 1$:

$$P(0) = P(1) = \cdots = P(n).$$

Dans ce cas, P est nécessairement constant. En effet, dans le cas contraire, P est de degré $k \geq 1$, soit $P(X) = a_k X^k + \cdots$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} P(n) = \lim_{n\to+\infty} a_k X^k = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_k > 0, \\ -\infty & \text{si } a_k < 0. \end{cases}$$

Ceci est en contradiction avec le fait que $P(n) = P(0)$ – qui entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n) = P(0)$.

Conclusion : si $P \in \operatorname{Ker}(\Phi)$, alors P est constant. Et comme la réciproque est claire (P constant $\Longrightarrow$ $P \in \operatorname{Ker}(\Phi)$), on obtient :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(\Phi) = \left\{\text{polynômes constants}\right\} = \mathbb{R}_0[X].}$$

(h) D'après la question 1.(f) :

$$P \in \mathbb{R}_n[X] \Longrightarrow \Phi(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X],$$

donc $\operatorname{Im}(\Phi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
De plus, d'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{R}_n[X]) &= \dim(\operatorname{Ker}(\Phi)) + \dim(\operatorname{Im}(\Phi)) \\ n+1 &= 1 + \dim(\operatorname{Im}(\Phi)) \\ n &= \dim(\operatorname{Im}(\Phi)). \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\left.\begin{array}{ll} \dim(\operatorname{Im}(\Phi)) & = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n \\ \operatorname{Im}(\Phi) & \subset \mathbb{R}_{n-1}[X] \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{Im}(\Phi) = \mathbb{R}_{n-1}[X].}$$

(i) Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\Phi(Q) = P$. On a donc

$$P(X) = Q(X+1) - Q(X).$$

On en déduit :

$$\sum_{i=0}^{n} P(i) = \sum_{i=0}^{n} (Q(i+1) - Q(i)) = \cancel{Q(1)} - Q(0) + \cancel{Q(2)} - \cancel{Q(1)} + \cdots + \cancel{Q(n)} - \cancel{Q(n-1)} + Q(n+1) - \cancel{Q(n)}.$$

Il s'agit d'une somme télescopique :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} P(i) = Q(n+1) - Q(0).}$$

2. (a) Considérons la famille $(H_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ où pour chaque i non nul,

$$H_i(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-(i-1))}{i!} = \frac{\prod_{k=0}^{i-1}(X-k)}{i!}$$

et $H_0(X) = P_0$ le polynôme constant égal à 1.

Pour tout entier $i \in [\![0,n]\!]$, H_i est un polynôme de degré i ; la famille $(H_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est donc une famille de $n+1$ polynômes non nuls échelonnés en degrés. Par conséquent :

$$\boxed{(H_i)_{i\in[\![0,n]\!]} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

(b) Pour tout i entier entre 1 et n, $\boxed{H_i(0) = \frac{0(0-1)\cdots(0-(i-1))}{i!} = 0.}$

(c) Pour tout i entier entre 1 et n,

$$H_i(X+1) = \frac{(X+1)(X+1-1)\cdots(X+1-(i-1))}{i!} = (X+1)\times\frac{X(X-1)\cdots(X-(i-2))}{i!}$$

et

$$H_i(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-(i-1))}{i!} = \frac{X(X-1)\cdots(X-(i-2))}{i!}\times(X-(i-1)),$$

donc

$$\begin{aligned}\Phi(H_i) = H_i(X+1) - H_i(X) &= (X+1)\times\frac{X(X-1)\cdots(X-(i-2))}{i!} - \frac{X(X-1)\cdots(X-(i-2))}{i!}\times(X-(i-1))\\ &= \frac{X(X-1)\cdots(X-(i-2))}{i!}\times[(X+1)-(X-(i-1))] = \frac{X(X-1)\cdots(X-(i-2))}{i!}\times i\\ &= \frac{X(X-1)\cdots(X-(i-2))}{(i-1)!} = H_{i-1}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \Phi(H_i) = H_{i-1}.}$$

(d) On fait une démonstration par récurrence abrégée sur $k \in [\![1,n]\!]$:

- d'abord $H_1 = X$, donc $\Phi^1(H_1) = \Phi(X) = 1 = H_0$, et la propriété est vraie pour l'entier $n = 1$.
- ensuite, si $k \in [\![1,n-1]\!]$ est tel que $\Phi^k(H_k) = 1$ (H.R.), alors

$$\Phi^{k+1}(H_{k+1}) = \Phi^k(\Phi(H_{k+1})) \overset{\text{qu°2.(c)}}{=} \Phi^k(H_k) \overset{\text{H.R.}}{=} 1.$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \Phi^i(H_i) = 1.}$$

(e) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(X)$, avec a_k réel pour tout k entier entre 0 et n.

D'abord

$$P(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(0) = a_0 H_0(0) + \sum_{k=1}^{n} a_k H_k(0).$$

Or $H_k(0) = 0$ pour $k \geq 1$ (qu°2.(b)) et $H_0(0) = 1$, donc $\boxed{P(0) = a_0.}$

Ensuite si $\ell \in [\![1,n]\!]$, par linéarité de Φ^ℓ :

$$\Phi^\ell(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi^\ell(H_k) = \sum_{k=0}^{\ell-1} a_k \Phi^\ell(H_k) + a_\ell \Phi^\ell(H_\ell) + \sum_{k=\ell+1}^{n} a_k \Phi^\ell(H_k)$$

(la somme tout à droite ne contient aucun terme si $\ell = n$).

D'après la qu°2.(d) :

- si $k \in [\![1,\ell-1]\!]$, $\Phi^\ell(H_k) = \Phi^{\ell-k}\left(\Phi^k(H_k)\right) = \Phi^{\ell-k}(1) = 0$ (puisque $\ell - k > 0$). Donc $\Phi^\ell(H_k)(0) = 0$.

- $\Phi^{\ell}(H_\ell) = 1$, donc $\Phi^{\ell}(H_\ell)(0) = 1$.

Enfin, par une récurrence immédiate basée sur la question 2.(c), si $k \in [\![\ell+1, n]\!]$, $\Phi^{\ell}(H_k) = H_{k-\ell}$, donc $\Phi^{\ell}(H_k)(0) = H_{k-\ell}(0) = 0$ d'après la question 2.(b) (puisque $k - \ell > 0$).

Conclusion :

$$\Phi^{\ell}(P)(0) = \sum_{k=0}^{\ell-1} a_k \underbrace{\Phi^{\ell}(H_k)(0)}_{=0} + a_\ell \underbrace{\Phi^{\ell}(H_\ell)(0)}_{=1} + \sum_{k=\ell+1}^{n} a_k \underbrace{\Phi^{\ell}(H_k)(0)}_{=0} = a_\ell.$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ a_\ell = \Phi^{\ell}(P)(0).}$$

(f) D'après la question 2.(a), $(H_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ peut s'écrire (de manière unique) sous la forme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(X).$$

D'après la question précédente, on a alors $a_k = \Phi^k(P)(0)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$; et $a_0 = P(0) = \Phi^0(P)(0)$, puisque $\Phi^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. On a donc

$$\boxed{P(X) = \sum_{k=0}^{n} \Phi^k(P)(0) H_k(X).}$$

(g) $\boxed{X = 0\times 1 + 1\times X = 0\times H_0(X) + 1\times H_1(X).}$

(h) D'après les questions 2.(c) et 2.(g) :

$$X = 0\times H_0(X) + 1\times H_1(X) = H_1 = \Phi(H_2),$$

donc d'après la question 1.(i) :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} H_1(k) = H_2(n+1) - H_2(0) = \frac{(n+1)n}{2} - 0 = \frac{(n+1)n}{2}.}$$

(i) $\boxed{0\times H_0(X) + 1\times H_1(X) + 2\times H_2(X) = 0\times 1 + 1\times X + 2\times \frac{X(X-1)}{2} = X + X(X-1) = X + X^2 - X = X^2.}$

(j) D'après la question précédente et la question 2.(c) :

$$X^2 = H_1(X) + 2\times H_2(X) = \Phi(H_2) + 2\Phi(H_3) = \Phi(H_2 + 2H_3),$$

donc d'après la question 1.(i) :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} [H_1(k) + 2\times H_2(k)] = (H_2 + 2H_3)(n+1) - (H_2 + 2H_3)(0).$$

Or $(H_2 + 2H_3)(0) = H_2(0) + 2H_3(0) = 0 + 2\times 0 = 0$, et

$$\begin{aligned}(H_2 + 2H_3)(n+1) = H_2(n+1) + 2H_3(n+1) &= \frac{(n+1)n}{2} + 2\times\frac{(n+1)n(n-1)}{6} = \frac{3(n+1)n}{6} + \frac{(n+1)n(2n-2)}{6}\\ &= \frac{(n+1)n(3+2n-2)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

(k) On ajoute les termes k^3 de proche en proche de 1 à n (on ne traite pas le cas $n=0$, sans intérêt) :

```
def somme_cubes(n):
        Somme = 0
        for k in range(1,n+1):
                Somme = Somme + k**3
        return Somme
```

Remarque : On peut également obtenir une formule explicite grâce aux résultats qui précèdent : la résolution d'un petit système pour identifier les coefficients (ou l'utilisation de la question 2.(f)) donne

$$X^3 = 6H_3 + 6H_2 + H_1 = \Phi\left(6H_4 + 6H_3 + H_2\right),$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = 6H_4(n+1) + 6H_3(n+1) + H_2(n+1).$$

Il ne reste alors plus qu'à calculer le terme de droite pour obtenir :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.}$$