Corrigé du devoir maison n°15

1. On calcule $I = \int_0^1 t \arctan t \,\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par parties : on pose

$$\begin{aligned} u'(t) &= t & v(t) &= \arctan t \\ u(t) &= \frac{1}{2}t^2 & v'(t) &= \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Chacune des fonctions u et v est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, donc :

$$I = \int_0^1 \underset{u'(t)}{t} \times \underset{v(t)}{\arctan t} \,\mathrm{d}t = \left[\underset{u(t)}{\frac{1}{2}t^2} \times \underset{v(t)}{\arctan t}\right]_0^1 - \int_0^1 \underset{u(t)}{\frac{1}{2}t^2} \times \underset{v'(t)}{\frac{1}{1+t^2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arctan 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Or $\frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$, et

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 1\,\mathrm{d}t - [\arctan t]_0^1 = 1 - (\arctan 1 - \arctan 0) = 1 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.}$$

2. On calcule $I = \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$:

$$x = t^2 \qquad \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t.$$

On complète le tableau de valeurs :

$x = t^2$	1	e^2
t	1	e

Le théorème de changement de variable donne

$$I = \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln\left(t^2\right)}{\sqrt{t^2}} 2t\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\ln t}{t} 2t\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} 4\ln t\,\mathrm{d}t.$$

On sait [1] qu'une primitive de $t \mapsto \ln t$ est $t \mapsto t\ln t - t$, donc

$$\boxed{I = [4(t\ln t - t)]_1^{\mathrm{e}} = 4\left(\mathrm{e}\underbrace{\ln \mathrm{e}}_{=1} - \mathrm{e}\right) - 4\left(1\underbrace{\ln 1}_{=0} - 1\right) = 4.}$$

Remarque : il est tout aussi naturel de faire le changement de variable $x = \mathrm{e}^t$, qui conduit à $I = \int_0^2 t\mathrm{e}^{t/2}\mathrm{d}t$. Cependant, vous ne connaissez pas de primitive de $t \mapsto t\mathrm{e}^{t/2}$, et il faut faire une IPP pour pouvoir terminer le calcul.

1. Si vous ne connaissez pas de primitive de $t \mapsto \ln t$, il faut faire une intégration par parties pour pouvoir conclure.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$.
On effectue d'abord un changement d'indice :

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} \underset{j=k-n}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n+j}.$$

Ensuite on met $\frac{1}{n}$ en facteur pour faire apparaître une somme de Riemann :

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n\left(1+\frac{j}{n}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{j}{n}}.$$

Il s'agit d'une somme de Riemann, pour la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$, sur l'intervalle $[0,1]$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, donc

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.}$$

4. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.
   (a) Soient un entier naturel n, un réel $x \in [0,1]$.
   D'une part $1 + x^n \geq 1$, donc $\frac{1}{1+x^n} \leq 1$. D'autre part, $(1-x^n)(1+x^n) = 1 - x^{2n} \leq 1$, donc $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n}$. On a donc

$$1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1,$$

   puis en multipliant par x (qui est positif) :

$$\boxed{x\left(1-x^n\right) \leq \frac{x}{1+x^n} \leq x.}$$

   (b) On intègre la double inégalité précédente sur l'intervalle $[0,1]$:

$$\int_0^1 x\left(1-x^n\right)\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x\,\mathrm{d}x.$$

   Autrement dit :

$$\int_0^1 \left(x - x^{n+1}\right)\mathrm{d}x \leq I_n \leq \int_0^1 x\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x \leq I_n \leq \int_0^1 x\,\mathrm{d}x.$$

   Or $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\times 1^2 - \frac{1}{2}\times 0^2 = \frac{1}{2}$ et $\int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2}\times 1^{n+2} - \frac{1}{n+2}\times 0^{n+2} = \frac{1}{n+2}$, donc finalement

$$\boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{2}.}$$

   On peut conclure : $\lim \frac{1}{n+2} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim I_n = \frac{1}{2}.}$$