Corrigé du devoir maison n°14

1. Le joueur obtient une paire de rois lorsqu'il a 2 des 4 rois du jeu, et 3 cartes parmi les 48 restantes. La probabilité que le joueur ait une paire de rois est donc égale à

$$\boxed{\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}}.}$$

2. Un événement $A \subset \Omega$ est indépendant de lui-même si, et seulement si

$$P(A\cap A) = P(A)\times P(A).$$

Or $A\cap A = A$, donc l'égalité ci-dessus se réécrit :

$$P(A) = P(A)^2 \iff P(A) - P(A)^2 = 0 \iff P(A)(1-P(A)) = 0 \iff P(A) = 0 \text{ ou } P(A) = 1.$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Les seuls événements indépendants d'eux-mêmes sont l'événement impossible et l'événement certain.}}$$

3. (a) La composition finale de l'urne est la même qu'au départ si, et seulement si, on tire une boule blanche et une boule noire ; c'est-à-dire une noire puis une blanche, ou bien une blanche puis une noire. On a donc

$$\boxed{A = (N_1\cap B_2)\sqcup(B_1\cap N_2)}$$

(la réunion étant bien sûr disjointe, comme l'indique le symbole $\sqcup$).

(b) D'après la question précédente et la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(N_1\cap B_2) + P(B_1\cap N_2) = P(N_1)\times P_{N_1}(B_2) + P(B_1)\times P_{B_1}(N_2).$$

- Si l'événement N_1 se réalise, il y a 2 noires et 6 blanches avant le 2^e^ tirage, donc $P_{N_1}(B_2) = \frac{6}{8}$.
- Si l'événement B_1 se réalise, il y a 4 noires et 4 blanches avant le 2^e^ tirage, donc $P_{B_1}(N_2) = \frac{4}{8}$.

On en déduit :

$$\boxed{P(A) = \frac{3}{8}\times\frac{6}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{4}{8} = \frac{19}{32}.}$$

4. On considère les événements U : « on choisit le dé n°1 », et S : « on obtient 6 ». Il s'agit de calculer $P_S(U)$, ce que l'on fait grâce à la formule de Bayes :

$$P_S(U) = \frac{P_U(S)\times P(U)}{P(S)}.$$

On calcule chaque terme :

- $P(U) = P\left(\overline{U}\right) = \frac{1}{2}$;
- $P_U(S) = \frac{1}{6}$, $P_{\overline{U}}(S) = \frac{1}{2}$;
- D'après la formule des probabilités totales,

$$P(S) = P(S \cap U) + P\left(S \cap \overline{U}\right) = P_U(S) \times P(U) + P_{\overline{U}}(S) \times P\left(\overline{U}\right) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

On en déduit :

$$\boxed{P_S(U) = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}.}$$

5. (a) Soit $n \geq 1$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P(O_{n+1}) &= P_{O_n}(O_{n+1}) \times P(O_n) + P_{\overline{O_n}}(O_{n+1}) \times P\left(\overline{O_n}\right) \\ &= \frac{1}{3} \times p_n + \frac{2}{3} \times (1 - p_n) = -\frac{1}{3} p_n + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geq 1 \ : \ p_{n+1} = -\frac{1}{3} p_n + \frac{2}{3}.}$$

(b) La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant arithmético-géométrique, il y a plusieurs méthodes pour étudier sa convergence. Nous avons choisi de nous ramener à l'étude d'une suite géométrique, ce qui est certainement la méthode la plus simple.

On cherche d'abord le « point fixe » en résolvant l'équation :

$$x = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \iff x + \frac{1}{3}x = \frac{2}{3} \iff \frac{4}{3}x = \frac{2}{3} \iff x = \frac{1}{2}.$$

On pose alors $v_n = p_n - \frac{1}{2}$ et l'on a, pour tout entier $n \geq 1$:

$$v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} p_n + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} p_n + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3} v_n.$$

On en déduit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = -\frac{1}{3}$, et puisque $v_1 = p_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, pour tout entier $n \geq 1$:

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

Enfin

$$p_n = v_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}.$$

On peut conclure :
$\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, donc $\lim \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$, et par conséquent $\lim p_n = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{La suite } (p_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \tfrac{1}{2}.}$$