Corrigé du devoir maison n°13

Partie I

On définit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto (1-x)e^x - x$.

1. On utilise la formule pour la dérivée d'un produit, avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 1-x, & v(x) &= e^x,\\ u'(x) &= -1, & v'(x) &= e^x. \end{aligned}$$

On obtient, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$f'(x) = -1 \times e^x + (1-x)e^x - 1 = -xe^x - 1.$$

Clairement f' est strictement négative sur $[0, +\infty[$, d'où le tableau :

x	0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$				$-$			
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

$$f(0) = (1-0)e^0 - 0 = 1$$

On calcule la limite en $+\infty$:

D'abord

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} (1-x) &= -\infty\\ \lim_{x\to+\infty} e^x &= +\infty \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} (1-x)e^x = -\infty,$$

puis

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} (1-x)e^x &= -\infty\\ \lim_{x\to+\infty} -x &= -\infty \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

2. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, 1]$.

Or $0 \in]-\infty, 1]$, donc

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans } [0, +\infty[.}$$

De plus, $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = (1-1)e^1 - 1 = -1 < 0$, donc $\boxed{\alpha \in [0, 1]}$.

Partie II

On définit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$.

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $0 \leq u_0 \leq 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n).$$

1.

(a) On utilise la formule pour la dérivée d'un quotient, avec :

$$u(x) = \mathrm{e}^x, \qquad v(x) = \mathrm{e}^x + 1,$$
$$u'(x) = \mathrm{e}^x, \qquad v'(x) = \mathrm{e}^x.$$

On obtient, pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times \left(\mathrm{e}^x + 1\right) - \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}.$$

Clairement g' est strictement positive sur $[0, +\infty[$, d'où le tableau :

x	0		α		1		$+\infty$
$g'(x)$			$+$				
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	α	$\nearrow$	≈ 0.73	$\nearrow$	

$$g(0) = \frac{\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^0 + 1} = \frac{1}{2}$$
$$g(1) = \frac{\mathrm{e}^1}{\mathrm{e}^1 + 1} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1} \approx 0{,}73$$

Enfin $f(\alpha) = 0$, donc $(1-\alpha)\mathrm{e}^\alpha - \alpha = 0$. Il s'ensuit

$$\mathrm{e}^\alpha = \frac{\alpha}{1-\alpha},$$

puis

$$g(\alpha) = \frac{\mathrm{e}^\alpha}{\mathrm{e}^\alpha + 1} = \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}}{\frac{\alpha}{1-\alpha} + 1} = \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}}{\frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{1-\alpha}{1-\alpha}} = \frac{\frac{\alpha}{\cancel{1-\alpha}}}{\frac{1}{\cancel{1-\alpha}}} = \alpha$$

$$\boxed{g(\alpha) = \alpha.}$$

(b) On sait que $g'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$ pour tout $0 \le x \le 1$.

Or $0 \le x \le 1 \implies \mathrm{e}^0 \le \mathrm{e}^x \le \mathrm{e}^1 \implies 1 \le \mathrm{e}^x \le \mathrm{e}$, car la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$.

D'un autre côté, $\mathrm{e}^x + 1 \ge 2$, donc $(\mathrm{e}^x+1)^2 \ge 4$ (deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés), puis

$$\frac{1}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \le \frac{1}{4}$$

(deux nombres strictement positifs sont rangés en sens contraire de leurs inverses).
Rassemblant ce qui précède, on obtient :

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{e}^x & \le \mathrm{e} \\ \frac{1}{(\mathrm{e}^x+1)^2} & \le \frac{1}{4} \end{array}\right\} \implies \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \le \frac{\mathrm{e}}{4}.$$

Autrement dit, $g'(x) \le \frac{\mathrm{e}}{4}$. Comme il est clair par ailleurs que $g'(x) \ge 0$, on obtient bien :

$$\boxed{\forall x \in [0,1] \ : \ |g'(x)| \le \frac{\mathrm{e}}{4}.}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathscr{P}_n \ : \ 0 \le u_n \le 1.$$

- $$0 \le u_0 \le 1 \implies \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$
- Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie, on a donc
$$0 \le u_k \le 1.$$

g est croissante sur $[0,1]$, donc

$$g(0) \leq g(u_k) \leq g(1)$$
$$0 \leq u_{k+1} \leq \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}$$

La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie, puisque $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1} \leq 1$.

- $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1.}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathscr{P}_n\ :\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n.$$

- $0 \leq u_0 \leq 1$ et $0 \leq \alpha \leq 1$, donc l'écart entre u_0 et α est inférieur à 1 :

$$|u_0 - \alpha| \leq 1.$$

Or $\left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^0 = 1$, donc $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^0$ et $\mathscr{P}_0$ est vraie.

- Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie, on a donc

$$|u_k - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^k. \tag{1}$$

Or $0 \leq u_k \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$ et $|g'(x)| \leq \frac{\mathrm{e}}{4}$ pour tout $x \in [0,1]$. Donc d'après l'IAF appliquée à la fonction g de classe $\mathscr{C}^1$:

$$\left|g(u_k) - g(\alpha)\right| \leq \frac{\mathrm{e}}{4}|u_k - \alpha|.$$

On en déduit, d'après (1) (hypothèse de récurrence), et puisque $g(\alpha) = \alpha$:

$$\left|g(u_k) - g(\alpha)\right| \leq \frac{\mathrm{e}}{4} \times \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^k$$
$$|u_{k+1} - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^{k+1}.$$

La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

- $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n.}$$

4. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n.$$

Or $\left|\frac{\mathrm{e}}{4}\right| < 1$, donc $\lim \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n = 0$; et d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim |u_n - \alpha| = 0.$$

On en déduit :

$$\boxed{\lim u_n = \alpha.}$$