Corrigé du devoir maison n°12

Exercice 1

Soient $E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y + z + t = 0\}$ et $v = (1, 1, 1, 1)$.

1.

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$$

car c'est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $x + y + z + t = 0$.

Soit $u = (x, y, z, t)$ un vecteur de E. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} u \in F &\iff x + y + z + t = 0 \\ &\iff t = -x - y - z \\ &\iff u = (x, y, z, -x - y - z) \\ &\iff u = x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,-1), \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{F = \mathrm{Vect}\,((1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)).}$$

La dimension de F est égale au rang de la famille $\mathscr{F} = ((1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1))$.
Or ce rang est celui de la matrice

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \end{array} \quad \text{qui est équivalente à} \quad \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 + L_2 + L_3 \end{array} \end{array}$$

Cette dernière est réduite échelonnée en ligne et elle a trois pivots, donc elle est de rang 3 ; et ainsi

$$\boxed{\dim(F) = 3.}$$

2. (a) On va prouver que $F \cap G = \{0_E\}$ par double inclusion.
   - $\boxed{\supset}$ F et G sont des sev de E, donc il contiennent 0_E. On en déduit $0_E \in F \cap G$; et donc $\{0_E\} \subset F \cap G$.
   - $\boxed{\subset}$ Soit u un vecteur de $F \cap G$. Comme $u \in G$, on peut écrire $u = (x, x, x, x)$, où x est un réel. Et comme $u \in F$, $x + x + x + x = 0$, donc $x = 0$. On en déduit $u = 0_E$, donc $F \cap G \subset \{0_E\}$.

Conclusion :

$$\boxed{F \cap G = \{0_E\}.}$$

(b) D'après la formule de Grassmann :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 3 + 1 - 0 = 4 = \dim E.$$

Conclusion :

$$\left.\begin{array}{ll} \dim(F+G) & = \dim E \\ F+G & \subset E \end{array}\right\} \Longrightarrow F+G = E$$

Comme par ailleurs $F \cap G = \{0_E\}$, on a bien

$$\boxed{E = F \oplus G.}$$

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on considère

$$F = \{P \in E \mid P(2) = 0\} \quad , \quad G = \{P \in E \mid P(-2) = 0\}.$$

1. On prouve que F est un sev de E :
   - D'abord le polynôme nul appartient à F.
   - Ensuite, si $P \in F$, $Q \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

   $$(\lambda P + \mu Q)(2) = \lambda P(2) + \mu Q(2) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0,$$

   donc $\lambda P + \mu Q \in F$.

   Conclusion :

   $$\boxed{F \text{ est un sev de } E.}$$

   F est strictement inclus dans E, car le polynôme X (par exemple) n'appartient pas à F. On a donc $\dim(F) < \dim(E) = n+1$.
   Par ailleurs, la famille

   $$\mathscr{F} = \left((X-2), (X-2)^2, \ldots, (X-2)^n\right)$$

   est clairement une famille d'éléments de F. De plus, elle est libre, car c'est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés. On en déduit que $\dim(F) \geq n$, et donc, puisque $\dim(F) < n+1$:

   $$\boxed{\dim(F) = n.}$$

   La famille $\mathscr{F}$ étant libre et de cardinal n, c'est une base de F :

   $$\boxed{\mathscr{F} = \left((X-2), (X-2)^2, \ldots, (X-2)^n\right) \text{ est une base de } F.}$$

On prouve de même que G est un sous-espace vectoriel de E de dimension n, dont une base est

$$\mathscr{G} = \left((X+2), (X+2)^2, \ldots, (X+2)^n\right).$$

2. Pour déterminer une base et la dimension de $F \cap G$, on pourrait mener un raisonnement similaire à celui de la question 1. Nous allons volontairement varier la méthode.

   Soit $P \in E$. On a les équivalences (cf cours sur les polynômes) :

$$\begin{aligned} P \in F \cap G &\iff (P \in F \text{ et } P \in G) \\ &\iff (P(2) = 0 \text{ et } P(-2) = 0) \\ &\iff (2 \text{ racine de } P \text{ et } -2 \text{ racine de } P) \\ &\iff (X-2)(X+2) \text{ divise } P \\ &\iff X^2 - 4 \text{ divise } P. \end{aligned}$$

   Donc
$$P \in F \cap G \iff P = \left(X^2-4\right) Q(X), \text{ avec } Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X],$$

   et par conséquent :

$$F \cap G = \text{Vect}\left(\left(X^2-4\right) \times 1, \left(X^2-4\right) \times X, \ldots, \left(X^2-4\right) \times X^{n-2}\right).$$

   La famille $\mathscr{H} = \left(\left(X^2-4\right) \times 1, \left(X^2-4\right) \times X, \ldots, \left(X^2-4\right) \times X^{n-2}\right)$ est libre, car c'est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés. C'est donc une base de $F \cap G$, qui est ainsi de dimension $n-1$.

   Il y a bien $n-1$ éléments dans la famille $\mathscr{H}$.

   Conclusion :

$$\boxed{\mathscr{H} = \left(\left(X^2-4\right) \times 1, \left(X^2-4\right) \times X, \ldots, \left(X^2-4\right) \times X^{n-2}\right) \text{ est une base de } F \cap G.}$$

$$\boxed{\dim(F \cap G) = n-1.}$$

3. D'après la formule de Grassmann :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = n + n - (n-1) = n+1.$$

   On a donc $\dim(F+G) = \dim E$; et comme $F + G \subset E$:

$$\boxed{E = F + G.}$$

   En revanche, $\boxed{\text{la somme n'est pas directe, car } \dim(F \cap G) = n-1, \text{ donc } F \cap G \neq \{0_E\}.}$