Corrigé du devoir maison n°11

Exercice 1

1. $\lim_{x\to 2}\left(4x^2+2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=4\times 2^2+2\sin\left(\frac{1}{2}\right)=16+2\sin\left(\frac{1}{2}\right)$ par continuité.

$$\boxed{\lim_{x\to 2}\left(4x^2+2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=16+2\sin\left(\frac{1}{2}\right).}$$

2. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$, donc $\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\sin 0=0$ par continuité de la fonction sin en 0.
Par ailleurs $\lim_{x\to+\infty}4x^2=+\infty$, donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(4x^2+2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=+\infty.}$$

3. Ici, il est maladroit d'utiliser la quantité conjuguée (ça rallonge inutilement la résolution). On écrit, pour $x\geq 1$ (il faut prendre $x\geq 1$ pour que le calcul ait un sens) :

$$\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}\right).$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$, donc $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{1-0}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{0-0}=0$ par continuité ; et finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-1}\right)=\text{« }+\infty\times(1-0)\text{ »}=+\infty.}$$

4. Soit $x>0$. On sait que $\lfloor x\rfloor>x-1$, donc

$$\frac{e^{\lfloor x\rfloor}-1}{x}>\frac{e^{x-1}-1}{x}$$

par croissance de exp sur $\mathbb{R}$. On a donc

$$\frac{e^{\lfloor x\rfloor}-1}{x}>\frac{e^{x-1}}{x}-\frac{1}{x}=e^{-1}\times\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}.$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ par croissance comparée, donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-1}\times\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}\right)=+\infty.$$

Finalement, d'après le théorème de limite par comparaison :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\lfloor x\rfloor}-1}{x}=+\infty.}$$

Exercice 2

Partie I

On pose $g : x \mapsto 1 - x - \ln x$.

1. L'ensemble de définition de g est
$$\boxed{D_g =]0, +\infty[\,.}$$
$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est continue sur son ensemble de définition}}$ par opération sur des fonctions continues.

2. Pour tout $x \in]0, +\infty[$:
$$g'(x) = -1 - \frac{1}{x}.$$
On en déduit :

x	0		$x_0 = 1$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$		$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Le calcul des limites est immédiat en appliquant les règles de calcul (on rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to 0,\ x>0} \ln x = -\infty$).

3. La fonction g est continue et strictement décroissante, donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$.
Or $0 \in]-\infty, +\infty[$, donc
$$\boxed{\text{l'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution } x_0 \text{ dans }]0, +\infty[\,.}$$

4. $\boxed{g(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0, \text{ donc } x_0 = 1.}$

Partie II

On pose $f : x \mapsto \frac{\ln x}{1 - x - \ln x}$.

5. Ici, il faut faire attention à deux choses :
   - au logarithme, qui impose de prendre $x > 0$:
   - au quotient, car on ne peut pas diviser par 0.

   Or d'après la partie I, le dénominateur s'annule uniquement lorsque $x = 1$, donc l'ensemble de définition de f est
$$\boxed{D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[\,.}$$
$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur son ensemble de définition}}$ par opération sur des fonctions continues.

6. Soit $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$. On écrit astucieusement :
$$f(x) = \frac{\ln x}{1 - x - \ln x} = \frac{\frac{\ln x}{1-x}}{\frac{1-x-\ln x}{1-x}} = \frac{\frac{\ln x}{1-x}}{1 - \frac{\ln x}{1-x}}.$$
Or $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{1-x} = -1$, donc
$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{-1}{1 - (-1)} = -\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\text{Conclusion : on peut prolonger } f \text{ par continuité en 1 en posant } f(1) = -\tfrac{1}{2}.}$$

Remarques :

- On obtient la limite $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = -1$ en écrivant

$$\frac{\ln x}{1-x} = -\frac{\ln(1+(x-1))}{x-1}$$

  et en utilisant $\lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$.
- On peut aussi prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = -1$ – on vous laisse en écrire la justification !