Corrigé du devoir maison n°10

1. Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   La condition « P divisible par $(X-1)$ » est équivalente à $P(1) = 0$, donc les conditions de l'énoncé se traduisent par le système

$$\begin{cases} P(1) &= 0 \\ P(2) &= P(0) \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ 4a+2b+c &= c \end{cases}$$

   On résout avec la méthode habituelle :

$$\begin{cases} a+ \quad b+c=0 & {\color{red}L_1} \\ 4a+2b \qquad =0 & {\color{red}L_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a+ \quad b+ \quad c=0 & {\color{red}L_1 \longleftarrow L_1} \\ \quad -2b-4c=0 & {\color{red}L_2 \longleftarrow L_2 - 4L_1} \end{cases}$$

   Conclusion :
   - c est un réel quelconque,
   - $b = \frac{4c}{-2} = -2c$,
   - $a = -b - c = 2c - c = c$.

   Les polynômes solutions sont donc les polynômes de la forme

$$\boxed{P(X) = cX^2 - 2cX + c = c\left(X^2 - 2X + 1\right) = c(X-1)^2, \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R}.}$$

2. On écrit la division euclidienne :

$$X^5 - X^4 + 2X^3 - 5X + 4 = \left(X^2 - 1\right) Q(X) + R(X),$$

   où Q et R sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et $\deg(R) < 2$. Autrement dit :

$$X^5 - X^4 + 2X^3 - 5X + 4 = \left(X^2 - 1\right) Q(X) + aX + b.$$

   On prend $X = 1$ et $X = -1$:
   - avec $X = 1$:

$$1^5 - 1^4 + 2 \times 1^3 - 5 \times 1 + 4 = \underbrace{\left(1^2 - 1\right)}_{=0} Q(1) + a \times 1 + b$$
$$1 = a + b$$

- avec $X=-1$:

$$(-1)^5-(-1)^4+2\times(-1)^3-5\times(-1)+4=\underbrace{\left((-1)^2-1\right)}_{=0}Q(-1)+a\times(-1)+b$$
$$5=-a+b$$

On a donc

$$\begin{cases} a+b=1 & L_1 \\ -a+b=5 & L_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+\ \ b=1 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ \quad 2b=6 & L_2 \longleftarrow L_2+L_1 \end{cases}$$

On en déduit $b=\frac{6}{2}=3$, puis $a=1-b=1-3=-2$. Autrement dit :

$$\boxed{\text{Le reste dans la division euclidienne de } X^5-X^4+2X^3-5X+4 \text{ par } X^2-1 \text{ est } -2X+3.}$$

3. On vérifie que $(2+\mathrm{i})$ est racine du polynôme $P(X)=X^3-7X^2+17X-15$.
On calcule d'abord :

$$(2+\mathrm{i})^2=2^2+4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=4+4\mathrm{i}-1=3+4\mathrm{i},$$
$$(2+\mathrm{i})^3=(2+\mathrm{i})^2\times(2+\mathrm{i})=(3+4\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=6+3\mathrm{i}+8\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2=6+11\mathrm{i}-4=2+11\mathrm{i}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(2+\mathrm{i}) &= (2+\mathrm{i})^3-7(2+\mathrm{i})^2+17(2+\mathrm{i})-15=2+11\mathrm{i}-7(3+4\mathrm{i})+17(2+\mathrm{i})-15 \\ &= 2+11\mathrm{i}-21-28\mathrm{i}+34+17\mathrm{i}-15=0. \end{aligned}$$

Conclusion : $(2+\mathrm{i})$ est racine de P ; et comme $P\in\mathbb{R}[X]$, le conjugué $(2-\mathrm{i})$ est aussi racine de P, donc

$$(X-2-\mathrm{i})(X-2+\mathrm{i})=X^2-2X+\mathrm{i}X-2X+4-2\mathrm{i}-\mathrm{i}X+2\mathrm{i}+1=X^2-4X+5 \quad \text{divise } P.$$

On effectue la division euclidienne :

$$\begin{array}{rr|l} & X^3-7X^2+17X-15 & X^2-4X+5 \\ \cline{3-3} - & X^3-4X^2+5X & \quad X-3 \\ \cline{2-2} & -3X^2+12X\ -15 & \\ - & -3X^2+12X\ -15 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

On en déduit : $P(X)=\left(X^2-4X+5\right)(X-3)$.
Les racines de X^2-4X+5 ne sont pas réelles : ce sont donc $2+\mathrm{i}$ et $2-\mathrm{i}$. On en déduit :

$$\boxed{\text{La décomposition de } P(X) \text{ dans } \mathbb{R}[X] \text{ est } P(X)=\left(X^2-4X+5\right)(X-3).}$$
$$\boxed{\text{La décomposition de } P(X) \text{ dans } \mathbb{C}[X] \text{ est } P(X)=(X-2-\mathrm{i})(X-2+\mathrm{i})(X-3).}$$

4. Les racines de P sont -2, 1, $\frac{1}{3}$ et un quatrième nombre α inconnu. D'après le cours (formule pour le produit des racines) :

$$\begin{aligned} -2\times 1\times\frac{1}{3}\times\alpha &= (-1)^4\frac{-4}{9} \\ -\frac{2}{3}\alpha &= -\frac{4}{9} \\ \alpha &= -\frac{4}{9}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La dernière racine de } P \text{ est } \alpha=\tfrac{2}{3}.}$$

5. Pour prouver que $(X+1)^2$ divise $P(X)=X^{54}+2X^{27}+1$, on calcule :
   - $P(-1)=(-1)^{54}+2\times(-1)^{27}+1=1-2+1=0$,
   - $P'(X)=54X^{53}+54X^{26}$, donc $P'(-1)=54\times(-1)^{53}+54\times(-1)^{26}=-54+54=0$.

   Conclusion : $P(-1)=P'(-1)=0$, donc d'après le cours

$$\boxed{(X+1)^2 \text{ divise } X^{54}+2X^{27}+1.}$$

6. On résout dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation

$$P'P''=X^4-X^3+3X^2-4X+1. \tag{1}$$

Un polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$ n'est clairement pas solution, car sa dérivée seconde est nulle. S'il existe une solution P, c'est donc un polynôme de degré $n\geq 2$. Mais alors

$$\deg(P')=n-1 \qquad , \qquad \deg(P'')=n-2,$$

donc en comparant les degrés dans (1) :

$$(n-1)+(n-2)=4 \iff 2n-3=4 \iff 2n=7 \iff n=3,5.$$

C'est absurde, car n est un entier supérieur à 2.

$$\boxed{\text{Conclusion : l'équation } P'P''=X^4-X^3+3X^2-4X+1 \text{ n'a aucune solution dans } \mathbb{R}[X].}$$