Corrigé du concours blanc n°1

Exercice 1

1. (a) On développe :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM'}\cdot\overrightarrow{u} &= \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'M'}\right)\cdot\overrightarrow{u}\\ &= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{A'M'}\cdot\overrightarrow{u}\\ &= -\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{A'M'}\cdot\overrightarrow{u}\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{A'M'}=t'\overrightarrow{u'}$, donc

$$\begin{aligned}-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{u} &= -t\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}\\ &= -t\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2=-t\left(1^2+(-1)^2+1^2\right)=-3t\\ \overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{u} &= 0\times1+(-3)\times(-1)+0\times1=3\\ \overrightarrow{A'M'}\cdot\overrightarrow{u} &= t'\overrightarrow{u'}\cdot\overrightarrow{u}\\ &= t'\left(-1\times1+2\times(-1)+2\times1\right)=-t'.\end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\overrightarrow{MM'}\cdot\overrightarrow{u}=-3t+3-t'.}$$

(b) On décompose et on calcule comme dans la question 1. On obtient (j'abrège un peu) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM'}\cdot\overrightarrow{u'} &= -\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{u'}+\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{u'}+\overrightarrow{A'M'}\cdot\overrightarrow{u'}\\ &= -t\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u'}+\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{u'}+t'\left\|\overrightarrow{u'}\right\|^2\\ &= t-6+9t'.\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{MM'}\cdot\overrightarrow{u'}=t-6+9t'.}$$

(c) Pour que (MM') soit perpendiculaire à la fois à D et à D', il faut et il suffit que

$$\overrightarrow{MM'}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{MM'}\cdot\overrightarrow{u'}=0.$$

D'après la question précédente, c'est équivalent à

$$\begin{cases}-3t-t'=-3 & \color{red}{L_1}\\ t+9t'=6 & \color{red}{L_2}\end{cases}$$

On résout par opérations sur les lignes :

$$\begin{cases}26t'=15 & \color{red}{L_1\leftarrow L_1+3L_2}\\ t+9t'=6 & \color{red}{L_2}\end{cases}$$

Il y a un seul couple solution :

$$\begin{aligned}t' &= \frac{15}{26}\\ t &= 6-9t'=6-9\times\frac{15}{26}=\frac{21}{26}\end{aligned}$$

Conclusion : (MM') est perpendiculaire à la fois à D et à D' lorsque

$$\begin{cases}x_M=x_A+t\times1=1+t=1+\frac{21}{26}=\frac{47}{26}\\ y_M=y_A+t\times(-1)=1-t=1-\frac{21}{26}=\frac{5}{26}\\ z_M=z_A+t\times1=0+t=\frac{21}{26}\end{cases},$$

soit

$$\boxed{M\left(\frac{47}{26};\frac{5}{26};\frac{21}{26}\right),}$$

et lorsque

$$\begin{cases}x_{M'}=x_{A'}+t'\times(-1)=\frac{11}{26}\\ y_{M'}=y_{A'}+t'\times2=-\frac{22}{26}\\ z_{M'}=z_{A'}+t'\times2=0+t=\frac{30}{26}\end{cases},$$

soit

$$\boxed{M'\left(\frac{11}{26};-\frac{22}{26};\frac{30}{26}\right).}$$

Conclusion : la distance de D à D' est

$$\begin{aligned}MM' &= \sqrt{\left(\frac{47}{26}-\frac{11}{26}\right)^2+\left(\frac{5}{26}+\frac{22}{26}\right)^2+\left(\frac{21}{26}-\frac{30}{26}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{2106}{676}}=\sqrt{\frac{81}{26}}=\frac{9}{\sqrt{26}}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La distance de } D \text{ à } D' \text{ est } \frac{9}{\sqrt{26}}.}$$

2. (a) Le vecteur $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}$ est orthogonal à la fois à D et à D', donc il est orthogonal à P. Ses coordonnées sont

$$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} -1\times 2-2\times 1\\ -1\times 1-2\times 1\\ 1\times 1-(-1)\times(-1)\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-4\\-3\\1\end{pmatrix}.$$

On a donc $P : -4x-3y+z+d=0$.

De plus, P contient D, donc il passe par $A(1;1;0)$, ce qui donne :

$$-4\times 1-3\times 1+0+d=0 \Longrightarrow -7+d=0 \Longrightarrow d=7.$$

Conclusion :

$$\boxed{P : -4x-3y+z+7=0.}$$

(b) Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-4\\-3\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal à P, donc il dirige Δ. On a donc :

$$\Delta : \begin{cases} x = x_{A'} + t\times(-4)\\ y = y_{A'}+t\times(-3)\\ z = z_{A'}+t\times 1\end{cases} \qquad \boxed{\Delta : \begin{cases} x = 1-4t\\ y=-2-3t\\ z=t\end{cases}}.$$

(c) Le point H est le point d'intersection de P et Δ, donc pour obtenir ses coordonnées, on injecte la représentation paramétrique de Δ dans l'équation de P et on résout :

$$\begin{aligned} &-4(1-4t)-3(-2-3t)+(t)+7=0\\ \Longleftrightarrow\ & -4+16t+6+9t+t+7=0\\ \Longleftrightarrow\ & 26t=-9 \Longleftrightarrow t=-\frac{9}{26}.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{cases} x_H &= 1-4\times\left(-\frac{9}{26}\right)=\frac{62}{26}\\ y_H &= -2-3\times\left(-\frac{9}{26}\right) = -\frac{25}{26}\\ z_H &= -\frac{9}{26}\end{cases}.$$

Conclusion :

$$\boxed{H\left(\frac{62}{26};-\frac{25}{26};-\frac{9}{26}\right).}$$

Finalement, la distance de D à D' est la même que la distance de A' à H. Elle vaut

$$\begin{aligned} A'H &= \sqrt{\left(\frac{62}{26}-1\right)^2+\left(-\frac{25}{26}+2\right)^2+\left(-\frac{9}{26}-0\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{2106}{676}} = \sqrt{\frac{81}{26}} = \frac{9}{\sqrt{26}}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La distance de } D \text{ à } D' \text{ est } \tfrac{9}{\sqrt{26}}.}$$

Exercice 2

1. Soient $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $S = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$.

   On utilise la linéarité de $\sum$ et la proposition du cours sur les sommes télescopiques :

$$\begin{aligned} S - q \times S &= \sum_{k=0}^{n} q^k - q \times \sum_{k=0}^{n} q^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q \times q^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(q^k - q^{k+1}\right) \\ &= q^0 - q^{n+1} \qquad \text{(somme télescopique).} \end{aligned}$$

   Autrement dit, $(1-q)S = 1 - q^{n+1}$, et donc (comme $q \neq 1$) :

$$\boxed{S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.}$$

2. On utilise la question 1, avec $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$:

$$\sum_{k=0}^{4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}} = \sum_{k=0}^{4} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)^k = \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)^5}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}}$$

$$= \frac{1-1}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}} = 0. \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}} = 0.}$$

3. On sait (formule d'Euler) que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}}{2},$$

   donc

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)^2 + 2 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} + \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)^2}{4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}} + 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}}{4}. \end{aligned}$$

   On a donc

$$\begin{aligned} &4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 \\ &= 4 \times \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}} + 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}}{4}\right) + 2 \times \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}}{2}\right) - 1 \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}} + 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} - 1 \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} + 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}. \end{aligned}$$

   On met $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}$ en facteur et on utilise la question précédente :

$$\begin{aligned} &4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{5}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}\left(\sum_{k=0}^{4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}} \times 0 = 0. \end{aligned}$$

   Conclusion :

$$\boxed{\cos\left(\tfrac{2\pi}{5}\right) \text{ est solution de l'équation } 4x^2 + 2x - 1 = 0.}$$

4. On résout l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$ (j'abrège) :
   - $\Delta = 20$.
   - $\Delta > 0$, donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$
$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

   Or $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$, donc

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.}$$

Exercice 3

1. (a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\cancel{k}n!}{\cancel{k} \times (k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!},$$

$$n\binom{n-1}{k-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

On a donc bien

$$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.}$$

(b) On utilise la question 1, la linéarité de $\sum$ et la formule du binôme de Newton. Pour tout réel x :

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}x^k = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k \underset{\boxed{j=k-1}}{=} n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^{j+1}$$

$$= n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} \times x \times x^j = nx\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^j 1^{n-1-j} = nx(1+x)^{n-1}. \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k = nx(1+x)^{n-1}.}$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k$.

(a) D'après la formule du binôme de Newton, comme le terme d'indice $k = 0$ vaut 1 ($\binom{n}{0}x^0 = 1$) :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k 1^{n-k} - 1 = (1+x)^n - 1.}$$

(b) Dans la formule de la question précédente, on dérive terme à terme le membre de gauche :

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

On en déduit, par linéarité de $\sum$:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \times x \times x^{k-1} = x\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = nx(1+x)^{n-1}.$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k = nx(1+x)^{n-1}.}$$

Problème

Généralités

I. 1. Pour tout réel x :

$$\mathrm{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \mathrm{ch}(x).$$

$$\boxed{\text{La fonction ch est paire.}}$$

I. 2. Pour tout réel x :

$$\boxed{\mathrm{ch}'(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}.}$$

On résout l'équation :

$$e^{x} - e^{-x} = 0 \iff e^{x} = e^{-x} \iff \ln\left(e^{x}\right) = \left(e^{-x}\right)$$
$$\iff x = -x \iff 2x = 0 \iff x = 0.$$

On en déduit le signe de ch' et les variations de ch :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$$\mathrm{ch}(0) = \frac{e^{0} + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

I. 3.

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} & = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} & = 0 \end{array}\right\} \implies \lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty.$$

Un calcul identique donne la limite en $-\infty$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty.}$$

I. 4. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
2\mathrm{ch}^2(x) - 1 &= 2\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1 \\
&= 2 \times \frac{(e^{x})^2 + 2 \times \overbrace{e^{x} \times e^{-x}}^{=1} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{2}{2} \\
&= \frac{e^{2x} + \cancel{2} + e^{-2x} - \cancel{2}}{2} \\
&= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \mathrm{ch}(2x).
\end{aligned}$$

On obtient bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(2x) = 2\mathrm{ch}^2(x) - 1.}$$

Une équation différentielle

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y'' - 4y = 4.$$

II. 1. L'équation homogène associée (H) a pour équation caractéristique

$$r^2 - 4 = 0.$$

Elle a deux solutions évidentes dans $\mathbb{R}$: $r_1 = 2$, $r_2 = -2$.
De plus, il est clair que la fonction constante $y_P = -1$ est une solution particulière de (E). Donc d'après le cours, les solutions de (E) sont les fonctions

$$\boxed{y : x \mapsto Ae^{2x} + Be^{-2x} - 1 \qquad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}).}$$

La dérivée est $y' : x \mapsto 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x}$, donc les conditions initiales $\begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ sont équivalentes à

$$\begin{cases} A + B - 1 = 3 \\ 2A - 2B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A + A - 1 = 3 \\ A = B \end{cases} \iff \begin{cases} A = 2 \\ B = 2 \end{cases}$$

Conclusion : l'unique solution de (E) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 3$ et $y'(0) = 0$ est la fonction

$$\boxed{y : x \mapsto 2e^{2x} + 2e^{-2x} - 1.}$$

II. 2. D'après la question I.4, la solution obtenue ci-dessus se réécrit :

$$\begin{aligned}
y(x) = 2e^{2x} + 2e^{-2x} - 1 &= 4\left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right) - 1 \\
&= 4\mathrm{ch}(2x) - 1 = 4\left(2\mathrm{ch}^2(x) - 1\right) - 1 = 8\mathrm{ch}^2(x) - 5.
\end{aligned}$$

Conclusion : la solution dans la question 1 peut s'écrire

$$\boxed{y : x \mapsto 8\mathrm{ch}^2(x) - 5.}$$

Un problème de tangente

III. 1. Le coefficient directeur de T_M est

$$f'(\ln 2) = \frac{\mathrm{e}^{\ln 2} - \mathrm{e}^{-\ln 2}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{\ln 2} - \mathrm{e}^{\ln \frac{1}{2}}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4},$$

donc T_M est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$; et donc aussi par le vecteur $4\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

De plus, $y_M = \mathrm{ch}(\ln 2) = \frac{\mathrm{e}^{\ln 2}+\mathrm{e}^{-\ln 2}}{2} = \frac{2+\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$, donc T_M a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x_M + t \times 4 \\ y = y_M + t \times 3 \end{cases} \qquad \boxed{T_M : \begin{cases} x = \ln 2 + 4t \\ y = \frac{5}{4} + 3t \end{cases}.}$$

III. 2. Le vecteur $4\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ dirige T_M, donc il est orthogonal à Δ et l'on a

$$\Delta : 4x + 3y + c = 0.$$

De plus, Δ passe par $A(\ln 2 ; 0)$, donc

$$4 \times \ln 2 + 3 \times 0 + c = 0 \iff c = -4\ln 2.$$

$$\boxed{\Delta : 4x + 3y - 4\ln 2 = 0.}$$

III. 3. On injecte la représentation paramétrique de T_M dans l'équation de Δ et on résout :

$$4(\ln 2 + 4t) + 3\left(\frac{5}{4} + 3t\right) - 4\ln 2 = 0$$

$$\iff \cancel{4\ln 2} + 16t + \frac{15}{4} + 9t - \cancel{4\ln 2} = 0$$

$$\iff 25t + \frac{15}{4} = 0 \iff t = -\frac{15}{4 \times 25} = -\frac{3}{20}.$$

On en déduit :

$$\begin{cases} x_H = \ln 2 + 4 \times \left(-\frac{3}{20}\right) = \ln 2 - \frac{3}{5} \\ y_H = \frac{5}{4} + 3 \times \left(-\frac{3}{20}\right) = \frac{25}{20} - \frac{9}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{H\left(\ln 2 - \frac{3}{5} ; \frac{4}{5}\right).}$

III. 4. Le cercle $\mathscr{C}$, de centre A, tangent à la droite T_M a pour rayon

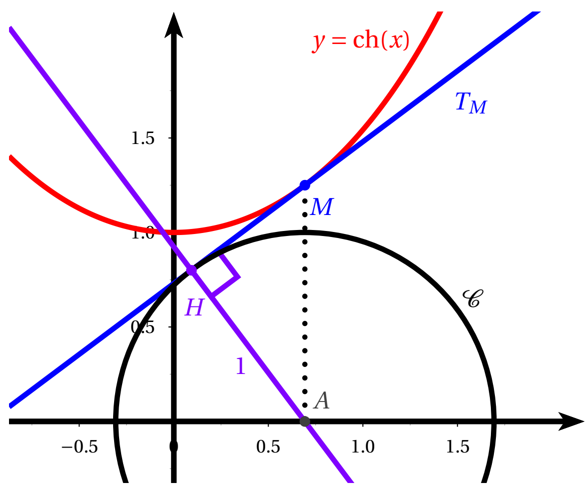
$$AH = \sqrt{\left(\cancel{\ln 2} - \frac{3}{5} - \cancel{\ln 2}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1,$$

donc son équation est

$$\mathscr{C} : (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = 1^2$$

$$\boxed{\mathscr{C} : (x - \ln 2)^2 + y^2 = 1.}$$

Illustration :



La fonction réciproque

IV. 1. (a) D'après l'IR n°3 :

$$\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)=y^2-\sqrt{y^2-1}^2$$
$$=y^2-\left(y^2-1\right)=1.$$

$$\boxed{\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)=1.}$$

On en déduit

$$y-\sqrt{y^2-1}=\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}.$$

Or $y+\sqrt{y^2-1}\geq 1$, puisque $y\geq 1$, donc comme deux nombres strictement positifs sont rangés en sens contraire de leurs inverses :

$$\boxed{y-\sqrt{y^2-1}\leq 1}.$$

(b) On a $\text{ch}(x)=y$, donc

$$\begin{aligned}\frac{\text{e}^x+\text{e}^{-x}}{2}=y &\implies \text{e}^x+\text{e}^{-x}=2y\\ &\implies \text{e}^x\left(\text{e}^x+\text{e}^{-x}\right)=\text{e}^x\times 2y\\ &\implies \text{e}^{2x}+1=2y\text{e}^x\\ &\implies \text{e}^{2x}-2y\text{e}^x+1=0.\end{aligned}$$

(c) En posant $X=\text{e}^x$, l'égalité de la question précédente s'écrit

$$X^2-2yX+1=0.$$

On résout :

- $a=1$, $b=-2y$, $c=1$.
- $\Delta=(-2y)^2-4\times1\times1=4y^2-4$.
- deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés, donc

  $$y\geq1\implies y^2\geq1\implies 4y^2-4\geq0\implies\Delta\geq0.$$

  Il y a donc deux racines (en réalité, une racine double si $y=1$) :

  $$X_1=\frac{2y-\sqrt{4y^2-4}}{2}=\frac{2y-2\sqrt{y^2-1}}{2}=y-\sqrt{y^2-1}$$
  $$X_2=\frac{2y-\sqrt{4y^2-4}}{2}=y+\sqrt{y^2-1}$$

Or $X=\text{e}^x\geq1$, car $x\geq0$, donc la 1re solution est à exclure d'après la question (a) (sauf si $y=1$, auquel cas les deux solutions sont égales).

Conclusion : $\text{e}^x=y+\sqrt{y^2-1}$, donc

$$\boxed{x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right).}$$

IV. 2. Si $x>1$, alors $\sqrt{x^2-1}>0$; on peut donc dériver $x\mapsto\sqrt{x^2-1}$ sur $]1;+\infty[$. On utilise la formule $(\ln\circ u)'=\frac{u'}{u}$, avec

$$u(x)=x+\sqrt{x^2-1}\qquad u'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

On obtient, pour tout $x\in]1;+\infty[$:

$$\begin{aligned}\text{argch}'(x)&=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}\\ &=\frac{\frac{\cancel{\sqrt{x^2-1}+x}}{\sqrt{x^2-1}}}{\cancel{x+\sqrt{x^2-1}}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in]1;+\infty[\ :\ \text{argch}'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.}$$

Remarque : On aurait aussi pu utiliser la formule pour la dérivée d'une réciproque, mais il y aurait eu une petite difficulté au moment de calculer $\text{ch}'(\text{argch}(x))$.

IV. 3. (a) Pour tout $x\in[1;+\infty[$:

$$\begin{aligned}\text{argch}(x)-\ln x&=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\ln x\\ &=\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)\\ &=\ln\left(1+\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\right)=\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in[1;+\infty[\ :\ \text{argch}(x)-\ln x=\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right).}$$

(b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1-0=1$$
$$\implies\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=1+\sqrt{1}=2$$

(limite d'une composée)

$$\implies\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=\ln 2$$

(à nouveau la limite d'une composée).

Or, pour tout $x\geq1$,

$$\begin{aligned}\text{argch}(x)-\ln(2x)&=\text{argch}(x)-\ln x-\ln 2\\ &=\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)-\ln 2\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{argch}(x)-\ln(2x)\right)=\ln 2-\ln 2=0.}$$

IV. 4. Les points importants à respecter pour le tracé :

- l'ensemble de définition $[1;+\infty[$.
- la tangente verticale au point de coordonnées $(1;0)$.
- la courbe asymptote d'équation $y=\ln(2x)$ en $+\infty$.
- la symétrie des courbes par rapport à la droite d'équation $y=x$.