Concours blanc n°1

décembre 2023 – 4h – calculatrices autorisées

La rédaction et le soin seront pris en compte dans l'évaluation.

Les exercices 1 à 3 d'une part, et le problème d'autre part, comptent pour une part sensiblement équivalente dans la note finale.

Exercice 1

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct :

- la droite D passant par $A(1;1;0)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$,
- la droite D' passant par $A'(1;-2;0)$ et dirigée par $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$.

On propose deux méthodes pour calculer la distance de D à D'.

1. **Méthode 1.**
   Soient M un point de D et M' un point de D'. Il existe donc deux réels t, t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{A'M'} = t'\overrightarrow{u'}$.
   (a) En écrivant $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M'}$, prouver que
   $$\overrightarrow{MM'}\cdot\overrightarrow{u} = -3t + 3 - t'.$$
   (b) Prouver de même que
   $$\overrightarrow{MM'}\cdot\overrightarrow{u'} = t - 6 + 9t'.$$
   (c) En déduire les points M de D et M' de D' tels que (MM') soit perpendiculaire à la fois à D et à D'. Prouver ensuite que la distance de D à D' est égale à $\frac{9}{\sqrt{26}}$.
2. **Méthode 2.**
   (a) Déterminer l'équation du plan P contenant la droite D et parallèle à la droite D'.
   (b) En déduire la représentation paramétrique de la perpendiculaire Δ au plan P passant par A'. Cette perpendiculaire coupe le plan P en H.
   (c) Déterminer les coordonnées de H, puis calculer la distance de D à D'.

Exercice 2

1. Soient $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $S = \sum_{k=0}^{n} q^k$.

   Démontrer la formule du cours :
   $$S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$
   Indication : calculer $q \times S$, puis $S - q \times S$.
2. En déduire que
   $$\sum_{k=0}^{4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}} = 0.$$
3. En utilisant l'une des formules d'Euler et la question précédente, prouver que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation
   $$4x^2 + 2x - 1 = 0.$$
4. Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 3

Dans cet exercice, on fixe un entier naturel non nul n. On propose deux méthodes pour calculer $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k$, où x est un réel.

1. **Méthode 1.**
   (a) Prouver que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:
   $$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
   (b) En déduire que pour tout réel x :
   $$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k = nx(1+x)^{n-1}.$$
2. **Méthode 2.**
   Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}x^k$.
   (a) Exprimer $f(x)$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
   (b) Utiliser la dérivation pour retrouver la formule obtenue dans la question 1.(b).

Problème

La fonction cosinus hyperbolique, notée ch, est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Dans ce problème, on étudie certaines de ses propriétés. La partie I est utilisée dans tout le problème, les parties II à IV sont indépendantes les unes des autres.

I Généralités

I. 1. Étudier la parité de la fonction ch.

I. 2. Calculer la dérivée de ch et construire son tableau de variations.

I. 3. Calculer les limites de ch en $+\infty$ et en $-\infty$. Compléter le tableau de variations.

I. 4. Démontrer que pour tout réel x :

$$\text{ch}(2x) = 2\text{ch}^2(x) - 1.$$

II Une équation différentielle

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) \; : \; y'' - 4y = 4.$$

II. 1. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

II. 2. Démontrer que cette solution peut s'écrire sous la forme

$$y(x) = a\,\text{ch}^2(x) + b,$$

où a et b sont deux nombres réels à déterminer.

III Un problème de tangente

Soit M le point de la courbe de la fonction ch d'abscisse $m = \ln 2$, T_M la tangente à la courbe de la fonction ch au point M, et A le point de coordonnées $(\ln 2; 0)$.

III. 1. Prouver que la droite T_M a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= \ln 2 + 4t \\ y &= \frac{5}{4} + 3t \end{cases}.$$

III. 2. Déterminer l'équation cartésienne de la perpendiculaire Δ à T_M passant par A.

III. 3. Prouver que $H\left(\ln 2 - \frac{3}{5} \; ; \; \frac{4}{5}\right)$ est le projeté orthogonal de A sur T_M.

III. 4. Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$, de centre A, tangent à la droite T_M.

IV La fonction réciproque

La restriction de la fonction ch à $[0;+\infty[$ réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[1;+\infty[$. Elle admet donc une bijection réciproque, que l'on note argch.

IV. 1. Soit $y \in [1;+\infty[$ et soit x l'unique solution dans $[0;+\infty[$ de l'équation $\operatorname{ch}(x) = y$.

(a) Vérifier que

$$\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)=1.$$

En déduire que

$$y-\sqrt{y^2-1}\leq 1.$$

(b) Prouver que

$$\mathrm{e}^{2x}-2y\mathrm{e}^{x}+1=0.$$

(c) En déduire que

$$x=\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right).$$

On a donc

$$\operatorname{argch}:[1;+\infty[\to[0;+\infty[,\ x\mapsto\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

IV. 2. Prouver que pour tout $x \in]1;+\infty[$:

$$\operatorname{argch}'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

IV. 3. (a) Démontrer que pour tout $x \in [1;+\infty[$:

$$\operatorname{argch}(x)-\ln x=\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right).$$

(b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{argch}(x)-\ln(2x)\right)=0.$

IV. 4. On a tracé sur la figure en annexe la courbe de la fonction ch et la courbe d'équation $y=\ln(2x)$. Construire soigneusement sur ce graphique la courbe de la fonction argch.

⚠ Ne pas oublier de joindre l'annexe à votre copie.