Chapitre 22 : Matrices et appl. lin.

Dans tout le chapitre, sauf indication contraire, E, F, G désignent des $\mathbb{K}$-e.v., avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Repr. matricielle d'une appl. lin.

Exemple 1

On considère l'application linéaire

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x+2y-3z, x+4z).$$

On note $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$e_1=(1,0,0),\quad e_2=(0,1,0),\quad e_3=(0,0,1),$$

et $\mathscr{C}=(f_1,f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$f_1=(1,0),\quad f_2=(0,1).$$

Remarquons que :

- $u(e_1)=u(1,0,0)=(1+2\times 0-3\times 0, 1+4\times 0)=(1,1)=1f_1+1f_2$,
- $u(e_2)=u(0,1,0)=(0+2\times 1-3\times 0, 0+4\times 0)=(2,0)=2f_1+0f_2$,
- $u(e_3)=u(0,0,1)=(0+2\times 0-3\times 1, 0+4\times 1)=(-3,4)=-3f_1+4f_2$.

On appelle matrice de u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \end{array}$$

D'une manière générale :

Déf. 1 Soit $u\in\mathscr{L}(E,F)$, où E et F sont de dimension finie, de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. On appelle matrice de u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathscr{C}$ des images des vecteurs de la base $\mathscr{B}$.

Remarque.
Si $E=F$ et $\mathscr{B}=\mathscr{C}$, on note simplement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Exemple 2

Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $P \mapsto P'$. On détermine $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, où $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On a

$$u(1) = 0 \quad , \quad u(X) = 1 \quad , \quad u\left(X^2\right) = 2X,$$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(1) & u(X) & u(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

Exemple 3

On reprend l'exemple 1. On choisit un vecteur x de $\mathbb{R}^3$ et on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. On pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. On a alors

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - 3z \\ x + 4z \end{pmatrix}.$$

On obtient les coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathscr{C}$.

L'exemple qui précède se généralise :

Théorème 1

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$, où E et F sont de dimensions finies, de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Si on note X le vecteur colonne des coordonnées d'un vecteur x dans la base $\mathscr{B}$, Y le vecteur colonne des coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathscr{C}$, et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, alors $Y = MX$.

Exemple 4

On reprend l'exemple 2 et on choisit le polynôme $P = 1 - 4X + 3X^2$. Ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, donc son image a pour coordonnées dans cette même base (on note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$) :

$$Y = MX = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On retrouve ainsi l'image : $u(P) = P' = -4 + 6X$.

Exercices

Exercices 1 à 3

Les deux propositions suivantes découlent du théorème 1 :

Proposition 1

Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$ où E, F, G sont de dimensions finies, de bases respectives $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u).$$

Proposition 2

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, où E est de dimension finie de base $\mathscr{B}$. On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. Alors u est inversible si, et seulement si, M est inversible. Dans ce cas, $M^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(u^{-1}\right)$.

Exemple 5

Soit $\Phi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X], P(X) \mapsto P(X+1)$.
Il est clair que :

- Φ est un isomorphisme;
- $\Phi^{-1} : P(X) \mapsto P(X-1)$.

On calcule les images des vecteurs de la base canonique $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$:

$$\begin{aligned}
\Phi(1) &= 1 \\
\Phi(X) &= X+1 \\
\Phi\left(X^2\right) &= (X+1)^2 = X^2+2X+1 \\
\Phi\left(X^3\right) &= (X+1)^3 = X^3+3X^2+3X+1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}(1) &= 1 \\
\Phi^{-1}(X) &= X-1 \\
\Phi^{-1}\left(X^2\right) &= (X-1)^2 = X^2-2X+1 \\
\Phi^{-1}\left(X^3\right) &= (X-1)^3 = X^3-3X^2+3X-1
\end{aligned}$$

On en déduit que les matrices

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\Phi^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont inverses l'une de l'autre.

Proposition 3

Si E est de dimension p et F de dimension n, alors l'application $\mathscr{L}(E,F) \to \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, est un isomorphisme.

Remarques.

- Donc par exemple, si $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v)$, alors $M+2N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u+2v)$.
- $\dim\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right) = n \times p$, donc $\mathscr{L}(E,F)$ est également de dimension finie $n \times p$.

Proposition 4

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, où E et F sont de dimension finie, de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$. Le rang de u est égal :

- au rang de la matrice M [a];
- à la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de M ;
- à la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs lignes de M.

a. On rappelle que le rang d'une matrice est égal au nombre de pivots de la matrice réduite échelonnée en lignes équivalente.

Remarque.
Si $u \in \mathscr{L}(E)$, avec E de dimension n, et si M est la matrice de u dans une base $\mathscr{B}$, les propositions suivantes sont équivalentes :

— u inversible,

— M inversible,

— $\operatorname{rg}(u) = n$,

— $\operatorname{rg}(M) = n$,

— $\det M \neq 0$.

(on n'a défini le déterminant qu'en dimensions 2 et 3, mais on généralise à toute dimension).

Exemple 6

On reprend l'exemple 5. Il est clair que les vecteurs colonnes de la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants, donc engendrent un espace vectoriel de dimension $n = 4$. L'endomorphisme Φ est donc inversible (certes, on le savait déjà, mais cela fournit une deuxième preuve).

Exercices

Exercices 4 à 8

II. Changement de base

Déf. 2 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, notée $\operatorname{Pass}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, est la matrice de la famille de vecteurs $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exemple 7

La famille $\mathscr{B}' = \left(2, X-1, -X^2+X-4\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, car elle est échelonnée en degrés, formée de polynômes non nuls, et de cardinal 3.
On note par ailleurs $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est

$$\operatorname{Pass}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

1. $\operatorname{Pass}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible et son inverse est $\operatorname{Pass}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.
2. On note $P = \operatorname{Pass}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. Si $x \in E$ a pour coordonnées X dans la base $\mathscr{B}$ et pour coordonnées X' dans la base $\mathscr{B}'$, alors $X = PX'$ et $X' = P^{-1}X$.

Exemple 8

On reprend l'exemple 7. Le polynôme $Q = X^2 + X$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.

La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est

$$P = \mathrm{Pass}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule son inverse à l'aide de Scilab :

$$P^{-1} = \mathrm{Pass}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que les coordonnées de Q dans la base $\mathscr{B}'$ sont :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie :

$$-1(2) + 2(X-1) - 1\left(-X^2 + X - 4\right) = X^2 + X = Q.$$

Théorème 2

Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ deux bases de F. Si on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$, $P = \mathrm{Pass}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ et $Q = \mathrm{Pass}_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}$, alors

$$B = Q^{-1}AP.$$

Remarque.
Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et si $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, alors en notant $P = \mathrm{Pass}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, la formule du théorème se réécrit :

$$B = P^{-1}AP.$$

Exemple 9

On reprend l'exemple 2 : la matrice de $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X],\ P \mapsto P'$ dans la base canonique $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2\right)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de u dans la base $\mathscr{B}' = \left(2, X-1, -X^2 + X - 4\right)$ est donc

$$B = P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déf. 3 Deux matrices A, B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables (notation pour ce cours : $A \equiv B$) s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ (matrice inversible) telle que $B = P^{-1}AP$.

Remarque.
La similitude est équivalente à ce que A et B représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Exercices
Exercices 9 à 13

III. Exercices

Exercice 1 (🏛).

1. Déterminer la matrice relative aux bases canoniques de l'application linéaire
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + y, -2x + y + z).$$
2. Utiliser la matrice de f pour calculer $f(1,1,1)$ et $f(1,-1,3)$.

Exercice 2 (🏛).

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme
$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X], P \mapsto P + (1 - X)P'.$$
2. Soient $P_1 = 1$, $P_2 = X - 1$, $P_3 = X^2 - X$. Prouver que $\mathscr{C} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$.

Exercice 3 (🏛).
Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que ces sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base adaptée à cette supplémentarité et écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 4 (🏛).
Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique et u l'endomorphisme de E défini par
$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3,\ u(e_2) = 3e_2,\ u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.
2. Déterminer le rang de u et une base de $\mathrm{Im}(u)$. L'endomorphisme u est-il surjectif? Est-il injectif?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
4. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 5 (🏛).

1. Déterminer la matrice relative à la base canonique de l'application linéaire
$$f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X], P(X) \mapsto P(X+1) - P(X).$$
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 6 (🏛).
Soient u, v les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis par :
$$u(x, y) = (2x - 5y, -x + 3y) \qquad v(x, y) = (3y, x - y).$$

1. Déterminer les matrices de u et v dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les matrices des applications linéaires $u + v$, u^{-1} et $v \circ u$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 (🏛).

Soit s l'endomorphisme de $E=\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la matrice de $s\circ s$. En déduire que s est inversible et déterminer son inverse.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$.
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de s est diagonale. Interpréter géométriquement.

Exercice 8 (🏛).

Chacune des matrices ci-dessous est la matrice d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans chaque cas :

- calculer le déterminant de la matrice et en déduire si u est inversible ou non;
- si u est inversible, déterminer la matrice de u^{-1} ; sinon, déterminer le rang de u et une base du noyau et de l'image.

Exercice 9 (🏛).

Soit

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A.

Soit $\mathscr{B}'=(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$ la famille définie par

$$\begin{cases} \epsilon_1 &= e_1+e_2-e_3 \\ \epsilon_2 &= e_1-e_3 \\ \epsilon_3 &= e_1-e_2 \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et former la matrice D de f dans cette base.
2. Exprimer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et calculer P^{-1}.
3. Quelle relation relie A, D, P et P^{-1} ?
4. Calculer A^n pour $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 10 (🏛).

Soit

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A.

On pose $\epsilon_1=(1,1,1)$, $\epsilon_2=(1,-1,0)$, $\epsilon_3=(1,0,1)$ et $\mathscr{B}'=(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice B de f dans cette base.
3. Exprimer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et calculer P^{-1}.
4. Quelle relation relie A, B, P et P^{-1} ?
5. Calculer A^n pour $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 11 (🏛 🏅).

On note $\mathscr{E}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{E}$ est $M=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On définit les vecteurs $b_1=(1,-2,1)$, $b_2=(0,2,-1)$ et $b_3=(0,0,1)$.

1. Prouver que $\mathscr{B}=(b_1,b_2,b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice T de f dans la base $\mathscr{B}$.
3. On pose $N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2 et N^3. En déduire N^k pour $k\geq 3$.
4. Soit $n\geq 2$. Calculer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
5. En déduire une formule pour M^n, lorsque $n\geq 2$.

Exercice 12 (🏅).

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé la symétrie s par rapport au plan d'équation $x+y+z=0$.

Déterminer la matrice de s dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13.

Soient A, B, C trois matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A\equiv B$ et $B\equiv C$.

1. Prouver que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $A^k\equiv B^k$.
2. Prouver que $A\equiv C$.