# Chapitre 21 : Variables aléatoires

Dans tout le chapitre, $(\Omega, P)$ désigne un espace probabilisé (en particulier, l'univers $\Omega$ est fini).

## I. Variable aléatoire : définition et exemples

**Déf. 1**

- Une variable aléatoire réelle est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- Donner la loi (de probabilité) de $X$, c'est donner toutes les valeurs possibles de $X$ et les probabilités avec lesquelles $X$ prend ces valeurs.

**Exemple 1**

On lancé deux dés équilibrés à 4 faces, on note $X$ la somme des numéros obtenus.

Pour donner la loi de $X$, on complète un tableau à double entrée où l'on calcule la valeur de $X$ en fonction du résultat de chaque dé :

| SOMME | | 1er dé | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2e dé | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

La loi de $X$ est donnée par :

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

On s'intéresse à deux événements particuliers :

- L'événement $(X = 6)$, dont la probabilité est
$$P(X=6) = \frac{3}{16}.$$
- L'événement $(X \geq 6)$, dont la probabilité est
$$P(X \geq 6) = P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) = \frac{3}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16}.$$

On a traité l'exemple précédent de façon très informelle. On explique dans les remarques ci-dessous « la rigueur cachée derrière ».

**Remarques.**

- L'univers est l'ensemble des résultats élémentaires possibles, que l'on écrit sous la forme (résultat du 1er dé, résultat du 2e dé) :
$$\Omega = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4)\}.$$
La variable aléatoire $X$ est la fonction
$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \left(x, y\right) \mapsto x + y.$$
Par exemple, $X(2,4) = 2+4 = 6$.

**Remarques.**

- L'événement $(X=6)$ est en fait
$$X^{-1}(\{6\}) = \{(x,y)\in\Omega \mid X(x,y)=6\} = \{(2,4);(3,3);(4,2)\}.$$
Il est sous-entendu que $\Omega$ est muni de la probabilité uniforme. Donc comme $(X=6)$ contient 3 éléments et que l'univers en contient 16 : $P(X=6)=\frac{3}{16}$.
- $X(\Omega)$ est l'ensemble des résultats possibles, c'est-à-dire que
$$X(\Omega)=\{2;3;4;5;6;7;8\}.$$
- La loi de $X$ est l'application $P_X$ qui, à toute partie $A$ de $X(\Omega)$, associe le nombre
$$P_X(A)=P(X\in A).$$
Par exemple :
$$P_X(\{6\}) = P(X\in\{6\}) = P(X=6) = \frac{3}{16}.$$
On vérifie facilement que $P_X$ est une probabilité sur $X(\Omega)$.

**Exercices**

Exercices 1 à 6

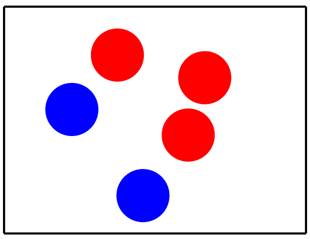
Quelques lois particulières reviennent fréquemment dans les exercices :

**Définition 2**

- On dit que $X$ suit une **loi certaine**, ou que $X$ est **constante**, s'il existe un réel $a$ tel que
$$P(X=a)=1$$
(on a donc $X(\Omega)=\{a\}$).
- Soient $x_1,\ldots,x_n$ $n$ réels distincts. On dit que $X$ suit la **loi uniforme** sur $\{x_1,\ldots,x_n\}$ si $X(\Omega)=\{x_1,\ldots,x_n\}$ et si
$$P(X=x_k)=\frac{1}{n}$$
pour tout $1\leq k\leq n$.
C'est la situation où l'on choisit un élément au hasard parmi les $x_i$, sans privilégier un résultat plutôt qu'un autre. Cela revient à dire que $P_X$ est la loi uniforme sur $\{x_1,\ldots,x_n\}$.
- Soit $0\leq p\leq 1$. On dit que $X$ suit la **loi de Bernoulli** de paramètre $p$ (notation : $X\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$) si $X(\Omega)=\{0;1\}$ et si
$$P(X=1)=p \qquad , \qquad P(X=0)=1-p.$$
- Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq p\leq 1$. On dit que $X$ suit la **loi binomiale** de paramètres $n$, $p$ (notation : $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$) si $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et si
$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$
pour tout $k\in[\![0,n]\!]$.
C'est la situation où l'on répète $n$ épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $p$ et où $X$ compte le nombre de succès.

**Exemple 2**

Une urne contient 2 boules bleues et 3 rouges indiscernables au toucher. On tire successivement dix boules au hasard, en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. On note $X$ le nombre de boules bleues tirées.



On répète $n=10$ épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $p=\frac{2}{5}=0,4$, donc $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n=10$, $p=0,4$.

On a donc par exemple :

- La probabilité de tirer trois boules bleues est
$$P(X=3)=\binom{10}{3}\times 0,4^3\times(1-0,4)^{10-3} = 120\times 0,4^3\times 0,6^7\approx 0,215.$$
- La probabilité de tirer au moins une boule bleue est $P(X\geq 1)$. Pour faire le calcul, il est judicieux d'utiliser l'événement contraire :
$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\underbrace{\binom{10}{0}}_{=1}\times\underbrace{0,4^0}_{=1}\times(1-0,4)^{10-0} = 1-0,6^{10}\approx 0,994.$$

**Méthode**

Dans l'exemple précédent, il faut retenir le schéma :

nb total boules    proba boule B    nb boules R

$$P(X=3) = \binom{10}{3} \times 0,4^3 \times 0,6^7$$

nb de boules B    proba boule R

**Exercices**

Exercices 7 à 13

# II. Espérance

**Déf. 3**

L'espérance d'une variable aléatoire $X$ est le nombre

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x).$$

**Exemple 3**

On reprend l'exemple 1. L'espérance de $X$ est

$$\frac{1}{16} \times 2 + \frac{2}{16} \times 3 + \frac{3}{16} \times 4 + \frac{4}{16} \times 5 + \frac{3}{16} \times 6 + \frac{2}{16} \times 7 + \frac{1}{16} \times 8 = \frac{80}{16} = 5.$$

**Exemple 4**

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$. On rappelle alors que

$$P(X=1) = p \quad , \quad P(X=0) = 1-p.$$

On a donc

$$E(X) = p \times 1 + (1-p) \times 0 = p.$$

**Proposition 1**

1. Si $X$ est certaine, avec $P(X=a)=1$, alors $E(X)=a$.
2. Si $X$ suit la loi uniforme sur $\{1;\dots;n\}$, alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$.
3. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $E(X) = p$.
4. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, alors $E(X) = np$.

**Exemple 5**

On reprend l'exemple 2 : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(10, 0.4)$, donc $E(X) = 10 \times 0,4 = 4$.

**Exercices**

Exercices 14 à 19

La proposition ci-dessous donne une autre expression pour le calcul de l'espérance – expression utile pour démontrer certains résultats du cours.

**Proposition 2**

On a aussi $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega)$.

**Exemple 6**

On reprend l'exemple 1. L'univers est

$$\Omega = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\},$$

et $X(x, y) = x + y$ pour tout couple $(x, y) \in \Omega$. Donc

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{16} \times X(\omega) = \frac{1}{16} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \\ &= \frac{1}{16} [(1+1)+(1+2)+(1+3)+(1+4)+(2+1)+\cdots+(4+4)] = 5. \end{aligned}$$

**Proposition 3 (linéarité de l'espérance)**

Si $X$, $Y$ sont deux variables aléatoires et si $a$, $b$ sont deux réels, alors

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

**Exemple 7**

On reprend encore l'exemple 1. On peut écrire $X = X_1 + X_2$, où $X_1$ est le résultat du dé n°1, $X_2$ celui du dé n°2.

$X_1$ et $X_2$ suivent la loi uniforme sur $\{1;2;3;4\}$, donc $E(X_1) = E(X_2) = \frac{1+4}{2} = 2,5$. On en déduit

$$E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 2,5 + 2,5 = 5.$$

**Théorème 1 (de transfert)**

Si $X$ est une variable aléatoire et $\varphi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$, alors l'espérance de la variable aléatoire $\varphi(X)$ est

$$E(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) P(X = x).$$

**Exemple 8**

On reprend l'exemple 1 :

$$E\left(X^2\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x) = \frac{1}{16} \times 2^2 + \frac{2}{16} \times 3^2 + \frac{3}{16} \times 4^2 + \frac{4}{16} \times 5^2 + \frac{3}{16} \times 6^2 + \frac{2}{16} \times 7^2 + \frac{1}{16} \times 8^2 = 27,5.$$

**Exercices**

Exercices 20 à 28

# III. Variance

**Définition 4**

- La variance d'une variable aléatoire $X$ d'espérance $\mu$ est le nombre

$$V(X) = E\left(X-\mu\right)^2 = \sum_{x \in X(\Omega)} \left(x-\mu\right)^2 P(X=x).$$

- L'écart-type de $X$ est le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

On démontre en exercice :

**Proposition 4 (formule de Koenig-Huygens)**

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2.$$

**Exemple 9**

On reprend les exemples 1 et 8. On a vu que $E(X) = 5$ et $E\left(X^2\right) = 27,5$, donc

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = 27,5 - 5^2 = 2,5 \qquad , \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2,5}.$$

**Exemple 10**

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$. On rappelle que $P(X=1) = p$, $P(X=0) = 1-p$ et $E(X) = p$. On a alors, par la formule de transfert :

$$E\left(X^2\right) = p \times 1^2 + (1-p) \times 0^2 = p.$$

On en déduit

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

**Remarque.**
$1^2 = 1$ et $0^2 = 0$, donc dans l'exemple précédent, $X^2 = X$ – les variables aléatoires sont égales.

**Proposition 5**

1. Si $X$ est certaine, avec $P(X=a) = 1$, alors $V(X) = 0$.
2. Si $X$ suit la loi uniforme sur $\{1;\ldots;n\}$, alors $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.
3. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $E(X) = p(1-p)$.
4. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, alors $E(X) = np(1-p)$.

**Exemple 11**

On reprend les exemples 2 et 5 : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(10, 0.4)$, donc $E(X) = 10 \times 0,4 = 4$ et

$$V(X) = 10 \times 0,4 \times (1-0,4) = 0,24.$$

**Remarques.**

- La variance d'une variable aléatoire est positive. Elle est nulle si, et seulement si, $X$ est constante.
- La variance est une « mesure de dispersion » : plus elle est grande, plus $X$ est susceptible de s'éloigner de son espérance.
- Si $X$ est une variable aléatoire et si $a$ et $b$ sont deux réels, alors $V(aX+b) = a^2 V(X)$.
- On dit que $X$ est centrée si $E(X) = 0$, et qu'elle est réduite si $V(X) = 1$.

**Exercices**

Exercices 29 à 34

**Proposition 6 (inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**

Soit $X$ une variable aléatoire d'espérance $\mu$ et de variance $V$. Alors pour tout $\delta > 0$ :

$$P\left(|X-\mu| \geq \delta\right) \leq \frac{V}{\delta^2}.$$

**Remarque.**
Le nombre $|X-\mu|$ est la distance entre $X$ et $\mu$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet donc de majorer la probabilité que $X$ s'éloigne de $\mu$ d'une distance supérieure à $\delta$. En français, elle peut se réécrire :

« La probabilité que la distance entre $X$ et $\mu$ soit supérieure à $\delta$ est inférieure à $\frac{V}{\delta^2}$. »

**Exemple 12**

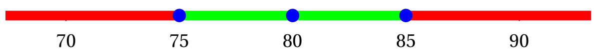
Lors d'une expérience en physique, on modélise la température de fusion d'un matériau par une variable aléatoire $X$ telle que

$$\mu = E(X) = 80 \quad , \quad V = V(X) = 4.$$

Utilisons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 5$ :

$$\begin{aligned} P\left(|X-\mu| \geq \delta\right) &\leq \frac{V}{\delta^2} \\ P(|X-80| \geq 5) &\leq \frac{4}{5^2} \\ P(|X-80| \geq 5) &\leq 0,16. \end{aligned}$$

Le nombre $|X-80|$ représente la distance entre $X$ et 80, donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dit que $X$ a moins de 16 % de chances d'être dans la zone rouge ci-dessous (les extrémités, 75 et 85, sont incluses dans la zone rouge).




Par conséquent, la probabilité d'être dans la zone verte est supérieure à $1-0,16=0,84$ :

$$P(|X-80| < 5) \geq 0,84,$$

soit

$$P(75 < X < 85) \geq 0,84.$$

**Remarques.**

- « $|X-80| < 5$ » est l'événement contraire de « $|X-80| \geq 5$ ».
- Plus la variance est faible, plus $\frac{V}{\delta^2}$ l'est également ; et donc plus la probabilité $P\left(|X-\mu| \geq \delta\right)$ est petite d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Cela confirme que la variance peut être vue comme une mesure de dispersion pour $X$.
- On dit que $]75,85[$ est un intervalle de fluctuation de niveau 84 % (au moins) pour $X$.

**Exercices**

Exercices 35 et 36

# IV. Exercices

**Exercice 1.**
On lance deux dés parfaitement équilibrés à 4 faces. On note $X$ le plus grand des numéros obtenus.

Déterminer la loi de $X$.

**Exercice 2.**
Une urne contient 10 billes indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 10. La bille numérotée 1 est rouge, les billes numérotées 2 à 5 sont bleues, les autres billes sont vertes.
On choisit une bille au hasard dans l'urne. On note $B$ l'événement « la bille tirée est bleue », et $X$ le numéro de la bille.

Calculer $P(X \geq 4)$, $P_B(X \geq 4)$ et $P_{(X\geq 4)}(B)$.

**Exercice 3.**
Une agence de voyage propose des itinéraires touristiques pour lesquels chaque client effectue un aller et un retour en utilisant soit un bateau, soit un train touristique. À l'aller, le bateau est choisi dans 65 % des cas. Lorsque le bateau est choisi à l'aller, il l'est également pour le retour 9 fois sur 10. Lorsque le train a été choisi à l'aller, le bateau est préféré pour le retour dans 70 % des cas.

Le coût d'un trajet aller ou d'un trajet retour est de 500 € en bateau ; il est de 300 € en train.

On note $Y$ la variable aléatoire qui associe, à un client pris au hasard, le coût en euros de son trajet aller-retour.

En utilisant un arbre pondéré, déterminer la loi de $Y$.

**Exercice 4 ().**
Lorsque le basketteur Stephen Curry tire en match, il y a 53 % de chances que ce soit un tir à 2 points et 47 % de chances que ce soit un tir à 3 points. De plus, quand il tire à 2 points, son pourcentage de réussite est 52 % contre 44 % à 3 points.
On choisit un tir au hasard. On considère les événements :
$D$ : « Stephen Curry tire à 2 points »,
$M$ : « Stephen Curry marque ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. On note $X$ le nombre de points pour le tir choisi au hasard. Déterminer la loi de $X$.

**Exercice 5 ().**
Une urne contient 10 boules rouges et 10 blanches indiscernables au toucher. On prélève 10 boules de l'urne.

Déterminer la loi du nombre $X$ de boules rouges tirées.

**Exercice 6 ().**
On choisit au hasard $n$ entiers distincts dans l'intervalle $[\![1, 2n]\!]$. On note $S$ la valeur maximale obtenue.

1. Déterminer $S(\Omega)$.
2. Calculer $P(S \leq k)$, pour $k \in S(\Omega)$.
3. En déduire la loi de $S$.

**Exercice 7 ().**
Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale, qui reconnaît convenablement 96 % des adresses – le reste du courrier est qualifié d'illisible.
Cette machine vient d'effectuer la lecture de dix adresses. On note $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses **illisibles** parmi ces dix adresses.

1. Déterminer la loi de $X$.
2. Calculer $P(X = 2)$. Arrondir au millième.
3. Quelle est la probabilité qu'au moins une adresse soit illisible ? Arrondir au millième.

**Exercice 8 ().**
Un QCM comporte 10 questions. Pour chacune d'entre elles, 4 réponses sont proposées, dont une seule est exacte. On note $X$ le nombre de bonnes réponses à ce QCM pour un élève qui répond au hasard à toutes les questions.
On arrondira les réponses au millième.

1. Déterminer la loi de $X$.
2. Calculer la probabilité des événements :
   $A$ : « l'élève a exactement trois bonnes réponses. »
   $B$ : « l'élève a au moins une bonne réponse. »
3. L'élève a au moins une bonne réponse. Quelle est la probabilité qu'il en ait exactement trois ?

**Exercice 9 ().**
On lance $n$ fois de suite un dé équilibré à 6 faces. Quelle est la probabilité de faire au moins un 6 ?

**Exercice 10 ().**
Un archer tire sur 10 cibles. À chaque tir, il a la probabilité $\frac{1}{3}$ de toucher la cible et les tirs sont supposés indépendants. Il tire une première fois sur chaque cible et on note $X$ le nombre de cibles atteintes lors de ce premier jet. L'archer tire ensuite une seconde fois sur les cibles restantes et on note $Y$ le nombre de cibles touchées lors de cette tentative.

Déterminer la loi de la variable $Z = X + Y$.

*Indication : d'un point de vue probabiliste, on peut faire comme si l'archer faisait ses essais sur la 1re cible, puis ses essais sur la 2e, etc.*

### Exercice 11 (🏅).

On dispose d'un dé à 6 faces et d'une pièce de monnaie. Après avoir effectué $n$ lancers de dé, on lance la pièce autant de fois qu'on a obtenu « 6 » avec le dé. On note $S$ le nombre de « 6 » obtenus avec le dé et $F$ le nombre de « faces » obtenues avec la pièce.

On vous inspirant de la méthode de l'exercice précédent, déterminer la loi de $F$.

### Exercice 12.

Un étang contient des brochets et des truites. On note $p$ la proportion de truites dans l'étang. On souhaite évaluer $p$. On prélève 20 poissons au hasard. On suppose que le nombre de poissons est suffisamment grand pour que ce prélèvement s'apparente à 20 tirages indépendants avec remise. On note $X$ le nombre de truites obtenues.

1. Quelle est la loi de $X$ ?
2. Le prélèvement a donné 8 truites. Pour quelle valeur de $p$ la quantité $P(X=8)$ est-elle maximale ?

*Cette méthode d'estimation de p s'appelle méthode du maximum de vraisemblance.*

### Exercice 13.

On se donne dans l'exercice une variable aléatoire $X$ suivant la loi binomiale de paramètres $n$, $p$.

1. Compléter le code ci-dessous, qui calcule $k!$ :

```
def fact(k):
        if k==0:
                return ...
        else:
                return ...
```

2. Compléter le code ci-dessous, qui calcule $\binom{n}{k}$ :

```
def binom(n,k):
        return ...
```

3. Compléter le code ci-dessous, qui calcule $P(a \leq X \leq b)$, où $0 \leq a \leq b \leq n$ sont deux entiers naturels.

```
def calcul(n,p,a,b):
        proba=0
        for k in range(...):
                proba=...
        return proba
```

4. **Application numérique.** Calculer $P(10 \leq X \leq 40)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$.

### Exercice 14 (🏛).

On reprend l'exercice 1. Calculer l'espérance de $X$.

### Exercice 15 (🏛).

On reprend l'exercice 4. Calculer l'espérance de $X$.

### Exercice 16 (🏛).

On reprend l'exercice 8. Calculer l'espérance de $X$.

### Exercice 17 (🏛).

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est $0,103$.

1. Dans cette question **1.** on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.

   On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.

   **a.** Donner la loi suivie par la variable aléatoire $X$. Préciser ses paramètres.

   **b.** Calculer l'espérance $E(X)$.

   **c.** Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif?
2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'événement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à $0,95$ ? Justifier.

### Exercice 18 (🏛).

Soit $n$ un entier naturel non nul. On tire une boule dans une urne qui contient, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $k$ boules numérotées $k$. On note $X$ le numéro tiré.

1. Déterminer la loi de $X$.
2. Calculer l'espérance de $X$.

### Exercice 19 (🏅).

1. Démontrer la formule pour l'espérance de la loi uniforme sur $\{1;\dots;n\}$.
2. Démontrer la formule pour l'espérance de la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

### Exercice 20 (🏛).

On lance trois dés équilibrés à 6 faces, on note $S$ la somme des résultats.

Calculer l'espérance de $S$.

### Exercice 21 (🏛).

On reprend les exercices 8 et 16. Si un candidat a bon à une question, il marque 2 points; s'il a faux, il perd 0,5 point.

On note $X$ le nombre de bonnes réponses et $Y$ la note du candidat (éventuellement négative).

1. Calculer $P(Y \geq 0)$.
2. Exprimer $Y$ en fonction de $X$, en déduire l'espérance de $Y$.

### Exercice 22 (🏛).

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(100, 0.4)$. Calculer $E(X-40)$.

### Exercice 23 (🏛).

Une urne contient 4 boules numérotées 0, 1, 1, 2. On tire successivement $n$ boules de cette urne (avec remise), on note $S$ la somme des numéros obtenus.

Calculer l'espérance de $S$.

### Exercice 24 (🏛).

Calculer $E\left(X^2\right)$, où $X$ suit la loi uniforme sur $\{1;\ldots;n\}$.

### Exercice 25 (🏅).

1. Soient $0 \leq k \leq n$. Prouver que $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Démontrer que

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

### Exercice 26 (🏅).

Redémontrer la formule pour l'espérance de la loi binomiale en utilisant la linéarité de l'espérance.

On posera $X_k = \begin{cases} 1 & \text{si on réussit la } k\text{-ième épreuve,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

### Exercice 27 (🏅).

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,n]\!]$, avec $n \geq 1$. En utilisant le fait que

$$P(X=k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1)$$

pour tout $1 \leq k \leq n$, prouver que

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geq k).$$

*Indication : on utilisera la linéarité de la somme et un changement d'indice.*

### Exercice 28 (🏅).

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs positives et soit $t > 0$.

1. Prouver que

$$E(X) \geq \sum_{x \in X(\Omega), x \geq t} xP(X=x).$$

2. En déduire

$$P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t} \qquad \textit{(inégalité de Markov).}$$

### Exercice 29 (🏛).

On reprend l'exercice 1. Calculer la variance de $X$.

### Exercice 30 (🏛).

Calculer $V(X)$, où $X \hookrightarrow \mathscr{B}(100, 0.4)$.

### Exercice 31 (🏛).

On reprend les exercices 8, 16 et 21. Calculer la variance de $X$, puis celle de $Y$.

### Exercice 32 (🏛).

Démontrer la formule de Koenig-Huygens.

### Exercice 33 (🏛).

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(100, 0.4)$. Déterminer deux réels $a$, $b$ tels que $Y = \frac{X-a}{b}$ soit centrée réduite.

### Exercice 34 (🏛).

Démontrer la formule pour la variance de la loi uniforme sur $\{1;\ldots;n\}$ (utiliser l'exercice 24).

### Exercice 35.

On lance 1 000 fois de suite un équilibré à 4 faces, on note $X$ le nombre de 4.

1. Quelle est la loi de $X$ ? Donner également son espérance et sa variance.
2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer $P\left(|X-250| \geq 25\right)$.
3. Minorer la probabilité $P\left(200 < X < 300\right)$.

### Exercice 36.

1. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, prouver que pour toute variable aléatoire $X$ d'espérance $\mu$ et d'écart-type $\sigma$ :

$$P\left(X \in \left]\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma\right[\right) \geq \frac{3}{4}.$$

2. Une variable aléatoire $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 400$, $p = 0,5$. Donner l'intervalle de fluctuation de niveau 75 % obtenu grâce à la question 1.
3. En utilisant les codes de l'exercice 13, déterminer le niveau réel de l'intervalle obtenu dans la question précédente.