Chapitre 20 : Développements limités

Dans tout le chapitre, sauf indication contraire, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$; et n désigne un entier naturel.

I. Formules de Taylor

Théorème 1 (Taylor avec reste intégral)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors :

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)^1}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t.$$

Remarques.

- Le théorème est démontré en exercices.
- Lorsque f est une fonction polynomiale de degré n, sa dérivée $(n+1)$-ième est nulle et on retrouve la formule de Taylor pour les polynômes : $P(X) = P(a) + \frac{(X-a)^1}{1!} P'(a) + \cdots + \frac{(X-a)^n}{n!} P^{(n)}(a)$.

Exemple 1

Soit $x \geq 0$. On applique la formule de Taylor à la fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$, sur l'intervalle $[0, x]$, avec $n = 1$:

$$f(x) = f(0) + \frac{(x-0)^1}{1!} f'(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^1}{1!} f''(t) \mathrm{d}t = x f'(0) + \int_0^x (x-t) f''(t) \mathrm{d}t.$$

Or $f' : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ et $f'' : t \mapsto -\frac{1}{(1+t)^2}$, donc la formule se réécrit :

$$\ln(1+x) = x - \int_0^x \frac{x-t}{(1+t)^2} \mathrm{d}t.$$

Comme on intègre une fonction positive, on en déduit que l'intégrale est positive ; et donc :

$$\forall x \geq 0 \,:\, \ln(1+x) - x \leq 0.$$

La formule permet également de « contrôler l'erreur » quand on fait le DL1 $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x + o(x)$:

$$\forall t \geq 0, \left| \frac{1}{(1+t)^2} \right| \leq \frac{1}{(1+0)^2} = 1,$$

donc

$$\left| \int_0^x \frac{x-t}{(1+t)^2} \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^x \left| \frac{x-t}{(1+t)^2} \right| \mathrm{d}t \leq \int_0^x (x-t) \mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^2}{2} \right]_0^x = -\frac{(x-x)^2}{2} + \frac{(x-0)^2}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

On en déduit :

$$\forall x \geq 0 \,:\, |\ln(1+x) - x| \leq \frac{x^2}{2}.$$

Exercices

Exercices 1 à 4.

Dans la formule de Taylor, on majore l'intégrale grâce à l'hypothèse « f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ ». On obtient

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \frac{(x-a)^1}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o\big((x-a)^n\big).$$

En réalité, on peut faire un petit peu mieux : le développement limité ci-dessus est valable lorsque f est de classe $\mathscr{C}^n$ uniquement :

Théorème 2 (Taylor-Young)

Soit $f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$. Alors :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \frac{(x-a)^1}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o\big((x-a)^n\big).$$

On applique cette formule aux fonctions usuelles et en prenant $a = 0$:

Proposition 1 (DL usuels)

- $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
- $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$.
- $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$.
- $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$.
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$.
- $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$.

II. Développements limités

Définition 1

On dit qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $0 \in I$ (notation : $\mathrm{DL}_n(0)$) s'il existe des réels a_0, a_1, …, a_n vérifiant

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right).$$

- Le polynôme $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ est appelé partie régulière du DL.
- Le terme $o(x^n)$ est appelé reste du DL.

Proposition 2

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, celui-ci est unique.

Exemple 2

La fonction $x \mapsto e^x$ admet le $\mathrm{DL}_3(0)$:

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).$$

Remarque.
Cela signifie que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

Proposition 3

Si f admet le $\mathrm{DL}_n(0)$

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}_{P(x)} + o\left(x^n\right),$$

alors pour tout entier $0 \leq k \leq n$, elle admet le $\mathrm{DL}_k(0)$:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + o\left(x^k\right).$$

Autrement dit, on « tronque » le polynôme P à l'ordre k.

Remarque.
On note $[P]_k$ le polynôme tronqué à l'ordre k.

Exemple 3

Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} 2 - 3x + x^2 - 4x^3 + o\left(x^3\right)$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} 2 - 3x + x^2 + o\left(x^2\right)$.

Exercices

Exercice 5

Proposition 4

Si f est une fonction paire (resp. impaire) qui possède un $\mathrm{DL}_n(0)$, alors la partie principale ne contient que des puissances paires (resp. impaires) de x.

Proposition 5

Soient f, g deux fonctions admettant les $\mathrm{DL}_n(0)$:

$$f(x) = P(x) + o\left(x^n\right),$$
$$g(x) = Q(x) + o\left(x^n\right).$$

Alors :

1. Pour tous réels α, β, la fonction $x \mapsto \alpha f(x) + \beta g(x)$ admet le $\mathrm{DL}_n(0)$:
$$\alpha f(x) + \beta g(x) \underset{x\to 0}{=} \alpha P(x) + \beta Q(x) + o\left(x^n\right).$$
2. La fonction $x \mapsto f(x)g(x)$ admet le $\mathrm{DL}_n(0)$:
$$f(x)g(x) \underset{x\to 0}{=} [P\times Q]_n(x) + o\left(x^n\right).$$
3. Si $Q(0) = 0$, la fonction $x \mapsto f\circ g(x)$ admet le $\mathrm{DL}_n(0)$:
$$f\circ g(x) \underset{x\to 0}{=} [P\circ Q]_n(x) + o\left(x^n\right).$$

Exemple 4

On sait que

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$$

et

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right),$$

donc

$$\cos x \times \sin x \underset{x\to 0}{=} \left[\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\right]_3 + o\left(x^3\right)$$
$$\cos x \times \sin x = \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)$$
$$\cos x \times \sin x = \underset{x\to 0}{=} x - \frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right).$$

En pratique, on développe le produit et on « laisse tomber » les termes de degré > 3.

Exemple 5

On souhaite donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ pour $x \mapsto x\mathrm{e}^x$. On sait que

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right),$$

ce qui signifie

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x),$$

où $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$. On en déduit

$$x\mathrm{e}^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + x^3\epsilon(x),$$

c'est-à-dire

$$x\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right).$$

Exemple 6

On sait que

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o\left(x^4\right),$$

donc

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + (-x)^4 + o\left(x^4\right)$$
$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o\left(x^4\right).$$

On en déduit :

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o\left(x^4\right).$$

Remarque.
D'une manière générale, « $x^n \times o\left(x^m\right) = o\left(x^{n+m}\right)$ » ; de même, « $\frac{o(x^m)}{x^n} = o\left(x^{m-n}\right)$ » .

Exercices

Exercice 6

Proposition 6

Si f admet le $\mathrm{DL}_n(0)$

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right)$$

et si F est une primitive de f sur I, alors F admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$, que l'on obtient en intégrant terme à terme :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

Exemple 7

On sait (cf exemple 6) que

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o\left(x^4\right).$$

On en déduit, par intégration (et puisque $\arctan 0 = 0$) :

$$\arctan x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right).$$

On peut aussi calculer les DL pour des quotients :

Exemple 8

On cherche un $\mathrm{DL}_3(0)$ pour la fonction tan. On sait que si $\cos x \neq 0$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. On utilise les DL_3 :

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right) \qquad \text{donc} \qquad 1 - \cos x \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$$
$$\frac{1}{1-x} = \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right).$$

On en déduit, en utilisant le DL d'une composée :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1-(1-\cos x)} \\
\frac{1}{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} \left[1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^3\right]_3 + o\left(x^3\right) \\
\frac{1}{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Par ailleurs $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$, donc avec le DL d'un produit :

$$\begin{aligned}
\tan x = \sin x \times \frac{1}{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} \left[\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\right]_3 + o\left(x^3\right) \\
\tan x &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \\
\tan x &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Exercices

Exercice 7

III. Compléments et applications

On généralise les résultats de la section 2 avec la notion de DL en un point a :

Déf. 2

On dit qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $a \in I$ (notation : $\mathrm{DL}_n(a)$) s'il existe des réels $a_0,\ a_1,\ \ldots, a_n$ vérifiant

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big).$$

Remarque. L'égalité qui caractérise le DL se réécrit

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o\big(h^n\big).$$

Pour obtenir un $\mathrm{DL}_n(a)$, il suffit d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral. Mais on peut généralement se ramener à un $\mathrm{DL}_n(0)$ comme dans l'exemple ci-dessous :

Exemple 9

On cherche un $\mathrm{DL}_n(2)$ pour la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ au voisinage de 1. Pour cela, on utilise la propriété fondamentale de l'exponentielle et le fait que $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^{x-1}\\
&\mathrm{e}^x \underset{x\to 1}{=} \mathrm{e}\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + o\big((x-1)^2\big)\right)\\
&\mathrm{e}^x \underset{x\to 1}{=} \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) + \frac{\mathrm{e}(x-1)^2}{2} + o\big((x-1)^2\big)
\end{aligned}$$

Exercices

Exercice 8

On termine la leçon avec des applications des DL : calculs de limites, études locales de fonctions, etc.

Exemple 10

On calcule $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.
On écrit un $DL_2(0)$ pour le numérateur et on divise par x^2 :

$$\begin{aligned}
1-\cos x &\underset{x\to 0}{=} 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o\big(x^2\big)\\
1-\cos x &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + o\big(x^2\big)\\
\frac{1-\cos x}{x^2} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} + o(1).
\end{aligned}$$

On en déduit $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

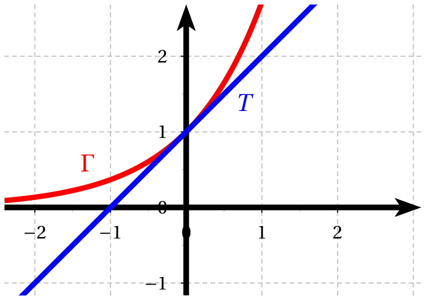
Exemple 11

On sait que $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x)$, donc la la tangente à la courbe $\Gamma : y=e^x$ au point d'abscisse 0 est $T : y=1+x$.

On pousse jusqu'à l'ordre 2 : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$, donc

$$e^x-1-x \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$$
$$e^x-1-x \underset{x\to 0}{=} x^2\left(\frac{1}{2}+o(1)\right).$$

Or $x^2 \geq 0$ et $\frac{1}{2}+o(1)$ est une quantité positive lorsque x est suffisamment proche de 0 (car elle tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0).
La courbe Γ est donc au-dessus de la tangente T au voisinage de 0.



Remarque.
En réalité, Γ est au-dessus de T sur $\mathbb{R}$ tout entier, et non seulement au voisinage de 0.

Exercices
Exercices 9 à 18

IV. Exercices

Exercice 1 (🏛).

1. Soit $x>0$. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction cos entre 0 et x, avec $n=4$.
2. En déduire
$$\left[\cos x-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}\right| \leq \frac{x^5}{5!}.$$
3. Déterminer une valeur approchée de $\cos\left(\frac{1}{2}\right)$ au millième.

Exercice 2 (🏛).

1. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{1+x}$. Calculer les dérivées de f d'ordres 1 à 4.
2. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral avec $n=3$, donner une valeur approchée de $\sqrt{1+\frac{1}{10}}$ à 10^{-4} près
3. En déduire une valeur approchée de $\sqrt{110}$ à 10^{-3} près.

Exercice 3 (🏅).
Démontrer par récurrence la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 4 (🏛).
On fixe un réel strictement positif x dans tout l'exercice.

1. On pose $u_n=\frac{x^n}{n!}$ pour tout entier naturel n.
   a. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang, puis qu'elle converge.
   b. Compléter : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\cdots\times u_n$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. a. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\left|e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!}.$$
   b. En déduire que $e^x=\lim \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$.

Exercice 5 (🏛).

Dans chaque cas, donner un $DL_n(0)$ pour la fonction :

1. $x \mapsto \mathrm{e}^x$ $(n=4)$.
2. $x \mapsto \sin x$ $(n=5)$.
3. $x \mapsto \sin x$ $(n=4)$.
4. $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ $(n=5)$.
5. $x \mapsto \ln(1+x)$ $(n=4)$.
6. $x \mapsto \sqrt{1+x}$ $(n=3)$.
7. $x \mapsto 1+2x-4x^3+3x^5$ $(n=4)$.
8. $x \mapsto 1+2x-4x^3+3x^5$ $(n=5)$.

Exercice 6 (🏛).

Dans chaque cas, donner un $DL_n(0)$ pour la fonction :

1. $x \mapsto \frac{1}{1-x} - \mathrm{e}^x$ $(n=3)$.
2. $x \mapsto x^2\mathrm{e}^x$ $(n=4)$.
3. $x \mapsto \frac{1}{1+2x}$ $(n=4)$.
4. $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\cos x$ $(n=3)$.
5. $x \mapsto \sqrt{1+x}\ln(1+x)$ $(n=3)$.
6. $x \mapsto \frac{x-2\sin x}{x}$ $(n=4)$.
7. $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x}$ $(n=3)$.
8. $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ $(n=4)$.
9. $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}{x^2}$ $(n=3)$.
10. $x \mapsto \ln(\cos x)$ $(n=4)$.
11. $x \mapsto (1+x)^{1/x}$ $(n=2)$.

Exercice 7 (🏛 🏅).

Dans chaque cas, donner un $DL_n(0)$ pour la fonction :

1. $x \mapsto \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ $(n=3)$.
2. $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x-1}$ $(n=2)$.
3. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(n=4)$.
4. $x \mapsto x\arcsin x$ $(n=6)$.
5. $x \mapsto \arctan(\sin x)$ $(n=3)$.

Exercice 8 (🏛 🏅).

Donner un DL :

1. Pour $x \mapsto \mathrm{e}^x$ à l'ordre 3 en 2.
2. Pour $x \mapsto \cos x$ à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$.
3. Pour $x \mapsto \sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 4.
4. Pour $x \mapsto \frac{x-1}{\ln x}$ à l'ordre 2 en 1.

Exercice 9 (🏛).

Calculer les limites :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x)-\mathrm{e}^x}{1-\cos x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 10 (🏛).

Soit $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Prouver que f est continue, puis qu'elle est dérivable en 0. Donner la valeur de $f'(0)$.

Exercice 11 (🏛 🏅).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Prouver que f est continue, puis qu'elle est dérivable en 0.
2. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 12 (🏛).

Déterminer l'allure de la courbe $\mathscr{C} : y = \sin x + \frac{1}{2}x^3$ au voisinage de 0 (on fera un dessin).

Exercice 13 (🏛).

Déterminer l'allure de la courbe $\mathscr{C} : y = x+2-\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 (on fera un dessin).

Exercice 14 (🏛).

Déterminer l'allure de la courbe $\mathscr{C} : y = x-x^2-2\ln(1+x)$ au voisinage de 0 (on fera un dessin).

Exercice 15 (🏅).

Calculer les limites :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x\ln(x+2) - x\ln x)$.

Exercice 16 (🏅).

Réaliser un développement asymptotique de la suite considérée à la précision demandée :

1. $u_n = n(\ln(n+1) - \ln n)$ à la précision $\frac{1}{n^2}$.
2. $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$ à la précision $\frac{1}{n^2}$.

Exercice 17 (🏅).

Démontrer qu'il existe une droite $\mathscr{D}$ asymptote à la courbe $\mathscr{C} : y = \sqrt{x^2+x+1}$ en $+\infty$.

Quelles sont les positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ au voisinage de $+\infty$?

Exercice 18 (🏅).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.