Chapitre 19 : Applications linéaires

Dans tout le chapitre, sauf indication contraire, E, F, G désignent des $\mathbb{K}$-e.v., avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Généralités

Définition 1

On dit qu'une application $u : E \to F$ est linéaire si, pour tous x, y dans E, pour tous λ, μ dans $\mathbb{K}$:

$$u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y).$$

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Remarque. Il revient au même d'imposer les deux conditions :

(1) $\forall x \in E, \forall y \in E,\ u(x+y) = u(x) + u(y)$

(2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ u(\lambda x) = \lambda u(x)$

Exemple 1

Soit

$$u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P'.$$

Par exemple,

$$u\left(X^2 - 3X + 1\right) = 2X - 3.$$

L'application u est linéaire. En effet, pour tous polynômes P, Q, pour tous réels λ, μ :

$$u(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q' = \lambda u(P) + \mu u(Q).$$

Exemple 2

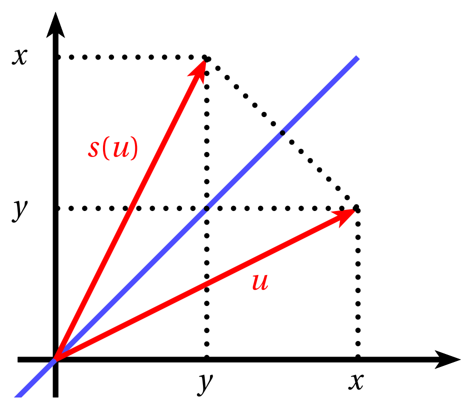
On note $E = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On définit

$$s : E \to E, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une application linéaire. En effet, si X, Y sont dans E et si λ, μ sont deux réels, alors

$$s(\lambda X + \mu Y) = A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY = \lambda s(X) + \mu s(Y).$$

Géométriquement, s s'interprète comme la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Exemple 3

Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors

$$u(0_E) = u(0_E + 0_E) = u(0_E) + u(0_E),$$

donc en simplifiant

$$u(0_E) = 0_F.$$

Définition 2

- Une application linéaire de E dans E est appelée endomorphisme. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée forme linéaire.

Exemple 4

L'application u de l'exemple 1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, l'application s de l'exemple 2 un endomorphisme de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Exemple 5

L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x + 2y$ est une forme linéaire. En effet, elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et :

- si $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, alors $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, donc

$$f(u+v) = x_1 + x_2 + 2(y_1 + y_2) = x_1 + 2y_1 + x_2 + 2y_2 = f(u) + f(v).$$

- si $u = (x,y)$ est un vecteur et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire, alors $\lambda u = (\lambda x, \lambda y)$, donc

$$f(\lambda u) = \lambda x + 2(\lambda y) = \lambda(x + 2y) = \lambda f(u).$$

Exercices

Exercice 1

Exemple 6

Soit $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ une application linéaire définie par

$$\forall k \in [\![0,3]\!],\ u\left(X^k\right) = kX^k.$$

On a alors (par exemple), par linéarité :

$$u\left(X^3 - X^2 + 4X + 2\right) = u\left(X^3\right) - u\left(X^2\right) + 4u(X) + 2u(1) = 3X^3 - 2X^2 + 4X + 2 \times 0 = 3X^3 - 2X^2 + 4X.$$

On voit que u est entièrement déterminée par les images des vecteurs de la base $\mathscr{B} = \left(X^3, X^2, X, 1\right)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

Remarques.

- D'une manière générale, si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et si $f_1, \dots, f_n$ sont des vecteurs de F, il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $f(e_i) = f_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
- Si $E = E_1 \oplus E_2$, une application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est déterminée par ses restrictions à E_1 et à E_2.

Exercices

Exercices 2 et 3

Déf. 3 L'identité de E, notée Id_E, est l'application linéaire $E \to E,\ x \mapsto x$.

Si $u : E \to F$ et $v : E \to F$ sont deux applications linéaires et λ, μ sont deux scalaires, on peut considérer $w = \lambda u + \mu v : E \to F, x \mapsto \lambda u(x) + \mu v(x)$. Il s'agit également (vérification immédiate) d'une application linéaire. On en déduit :

Proposition 1

$\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.

On peut également considérer la composée de deux applications linéaires :

Proposition 2

Si $u : E \to F$ et $v : F \to G$ sont deux applications linéaires, alors

$$v \circ u : E \to G,\ x \mapsto v \circ u(x),$$

est une application linéaire.

Lorsque $u \in \mathscr{L}(E)$, on peut composer u par elle-même :

Définition 4 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit une application linéaire par

$$u^n = \begin{cases} \mathrm{Id}_E & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}} & \text{si } n > 0 \end{cases} \cdot$$

Exemple 7

On reprend l'exemple 2 : on note $E = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on définit l'endomorphisme

$$s : E \to E, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \arrow[r, "s"] \arrow[rr, bend left, "s^2 = s \circ s"] & \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \arrow[r, "s"] & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

On a donc $s^2 = \mathrm{Id}_E$, ce que l'on peut encore écrire $s^2 - \mathrm{Id}_E = 0$, où 0 désigne l'application nulle $E \to E, X \mapsto 0_E$.

Remarque.
D'une manière générale, on peut appliquer un polynôme à un endomorphisme. Par exemple, si $P(X) = X^2 - 1$, alors $P(u) = u^2 - \mathrm{Id}_E$ comme ci-dessus ; et si $Q(X) = 2X^3 + X - 3$, alors $Q(u) = 2u^3 + u - 3\mathrm{Id}_E$.

Exercices

Exercices 4 à 7

II. Image et noyau

Définition 5

Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et E', F' deux sev de E et F respectivement.

- L'image directe de E' par u est $u\left(E'\right) = \left\{u(x) | x \in E'\right\}$.
- L'image réciproque de F' par u est $u^{-1}\left(F'\right) = \left\{x \in E | u(x) \in F'\right\}$.

Attention

Ici, $u^{-1}\left(F'\right)$ est une notation pour un ensemble ; elle ne signifie pas que u admet une bijection réciproque.

Proposition 3

Dans la situation de la définition qui précède, $u\left(E'\right)$ et $u^{-1}\left(F'\right)$ sont des sous-espaces vectoriels respectivement de F et de E.

Exemple 8

Soit $u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P'$ (cf exemple 1) et soit $G = \mathbb{R}_2[X]$. Il est (assez) clair que :

- $u(G) = \mathbb{R}_1[X]$.
- $u^{-1}(G) = \mathbb{R}_3[X]$.

Définition 6

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

- L'image de u, notée $\mathrm{Im}(u)$, est le sous-espace vectoriel de F défini par

$$\mathrm{Im}(u) = u(E) = \{u(x) | x \in E\}.$$

- Le noyau de u, noté $\mathrm{Ker}(u)$, est le sous-espace vectoriel de E défini par

$$\mathrm{Ker}(u) = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E | u(x) = 0_F\}.$$

Exemple 9

On reprend l'exemple 5 : l'application f est la forme linéaire définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x + 2y.$$

- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. En effet, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}$; et réciproquement, si $z \in \mathbb{R}$, alors $f(z,0) = z + 2 \times 0 = z$, donc $z \in \mathrm{Im}(f)$.
- Soit $u = (x,y) \in E$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(u) = 0 \iff x + 2y = 0 \iff x = -2y \iff u = (-2y, y) \\ &\iff u = y(-2,1) \iff u \in \mathrm{Vect}((-2,1)). \end{aligned}$$

- Conclusion : $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-2,1))$.

Proposition 4

Si $\mathscr{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathscr{F}' = (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$.

Exercices

Exercices 8 à 15

On rappelle :

Définition 7

Une application $f : E \to F$ est :

- Surjective si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet **au moins une** solution dans E.
- Injective si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet **au plus une** solution dans E.
- Bijective si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet **exactement une** solution dans E.

Proposition 5

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On a les équivalences :

1. u surjective $\iff \operatorname{Im}(u) = F$.
2. u injective $\iff \operatorname{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Remarque.
Le 1er point est évident; le 2e est démontré en exercices.

Exemple 10

On reprend les exemples 5 et 9 :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x + 2y.$$

On a vu que f était surjective : $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$; en revanche, elle n'est pas injective, car $\operatorname{Ker}(f) \neq \left\{0_{\mathbb{R}^2}\right\}$.

Exemple 11

On reprend encore l'exemple de

$$u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P'.$$

- u n'est pas injective, car (par exemple) $u(1) = 0$.
- Soit $Q = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Alors $Q = u(P)$, où

$$P(X) = \frac{a_n}{n+1} X^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} X^n + \cdots + a_0 X,$$

donc u est surjective.

Définition 8

- On dit que $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est un isomorphisme si elle est bijective. Dans ce cas, elle admet une bijection réciproque $u^{-1} : F \to E$.
- On dit que $u \in \mathscr{L}(E)$ est un automorphisme si elle est bijective. On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Remarque.
Pour que $v : F \to E$ soit la réciproque de $u : E \to F$, il faut et il suffit que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$ et $u \circ v = \mathrm{Id}_F$.

Exemple 12

On reprend les exemples 2 et 7 : on note $E = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on définit l'endomorphisme

$$s : E \to E, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

On a vu que $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_E$, donc s est un automorphisme et $s^{-1} = s$ (s est son propre inverse).

Remarque.
Si $u : E \to F$ et $v : F \to G$, sont deux isomorphismes, alors $v \circ u : E \to G$ est un isomorphisme.

Exercices
Exercices 16 à 18

Proposition 6

Si $u : E \to F$ est un isomorphisme, alors v^{-1} est un isomorphisme (en particulier v^{-1} est linéaire).

Déf. 9 On appelle équation linéaire d'inconnue x une équation de la forme $u(x) = y$, où $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $x \in E$ et $y \in F$.

Exemple 13

On cherche les solutions de l'EDL1

$$(E) \ : \ y' + y = x.$$

Autrement dit, notant $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on cherche les solutions de l'équation $u(y) = x$, où u est l'endomorphisme

$$u : E \to E, y \mapsto y' + y.$$

- La fonction $y_P : x \mapsto x - 1$ est une solution particulière de (E), puisque $y_P' + y_P = 1 + (x-1) = x$.
- Les solutions de l'équation homogène associée $(H) \ : \ y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme $y_H : x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}$.
- D'après les résultats du chapitre 5, la solution générale de (E) est

$$y : x \mapsto C\mathrm{e}^{-x} + x - 1.$$

Remarque.
Si l'on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E), on peut écrire de façon informelle

$$\mathscr{S} = \mathrm{Ker}(u) + y_P.$$

On retrouve la même structure pour l'ensemble des solutions de toutes les équations linéaires (différentielles ou non).

Exercices
Exercice 19

III. Appl. lin. en dimension finie

Proposition 7

Soient E, F deux espaces vectoriels, avec E de dimension finie, de base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
Si $y_1, \dots, y_n$ sont des éléments de F, il existe une unique application linéaire $u : E \to F$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ u(e_i) = y_i.$$

Exemple 14

$\mathscr{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}' = \left(X^2, X, 1\right)$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
On définit (de façon unique) une application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X]$ en posant :

$$u(1,0,0) = X^2\ ,\ u(0,1,0) = X\ ,\ u(0,0,1) = 1.$$

On aura (par exemple) :

$$\begin{aligned} u(3,-2,1) &= u(3(1,0,0) - 2(0,1,0) + (0,0,1)) \\ &= 3u(1,0,0) - 2u(0,1,0) + u(0,0,1) \\ &= 3X^2 - 2X + 1. \end{aligned}$$

Dans l'exemple qui précède, on a trouvé un isomorphisme évident (l'application u) de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, en associant les éléments de la base $\mathscr{B}$ à ceux de la base $\mathscr{B}'$. Plus généralement :

Proposition 8

1. Deux espaces vectoriels E, F de dimension finie sont isomorphes (c-à-d qu'il existe un isomorphisme $u : E \to F$) si et seulement s'ils ont même dimension.
2. $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est un isomorphisme si, et seulement si, elle transforme une (toute) base de E en une base de F.

Exercices

Exercices 20 et 21

Définition 10

On dit que $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est de rang fini si $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie. Dans ce cas, cette dimension est appelée rang de u et notée $\mathrm{rg}(u)$.

Théorème 1 (du rang)

Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u).$$

Exemple 15

On considère l'application linéaire

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x + 2y - 3z.$$

Il est clair que $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}$, donc u est de rang 1 ; et d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(u) = 3 - 1 = 2.$$

C'est une évidence géométrique : $\mathrm{Ker}(u)$ est le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$, donc sa dimension est égale à 2.

Exemple 16

On considère l'application linéaire

$$\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X],\ P(X) \mapsto P(X) - XP'(X).$$

Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. Son image par φ est

$$\varphi(P) = P(X) - XP'(X) = aX^2 + bX + c - X(2aX + b) = -aX^2 + c.$$

On a donc :

- $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(X^2, 1\right)$;
- $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \varphi(P) = 0 \iff a = c = 0 \iff P \in \mathrm{Vect}(X)$, donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X)$.

On a bien

$$\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3 = 1 + 2 = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u).$$

Le théorème suivant est un corollaire immédiat du théorème du rang :

Théorème 2

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$, avec E et F de même dimension finie. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- u est injective,
- u est surjective,
- u est bijective.

Exemple 17

Soit

$$\Phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X],\ P \mapsto P + P'.$$

- Φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$, car $\deg(P + P') = \deg P$ pour tout polynôme P. Il est facile par ailleurs de voir que Φ est linéaire.
- De plus, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, $\deg(\Phi(P)) = \deg(P + P') = \deg P$, donc $\Phi(P) = 0 \implies P = 0$. Autrement dit, Φ est injective. Or $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, donc Φ est bijective.
- Application : si $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = P + P'$ (ce résultat n'a rien d'évident et une démonstration « à la main » serait fastidieuse).

Exercices

Exercices 22 à 30

IV. Exercices

Exercice 1.
Les applications suivantes sont-elles linéaires?

1. $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
2. $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x+3y, 1)$.
3. $w : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto \left(X^2+1\right)P$.
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x+y, y+z)$.
5. $g : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), y \mapsto y'$.
6. $h : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P(X) \mapsto P(X+1)$.
7. $i : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), X \mapsto AX$, où A est une matrice donnée de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
8. $j : \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 2.
Soit u l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par les images des vecteurs de la base canonique :

M	$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
$u(M)$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$

Déterminer l'image par u de la matrice

$$A = \begin{pmatrix}2&0\\3&-1\end{pmatrix}.$$

Exercice 3.

1. Prouver qu'il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$f(1,0,0) = (0,1),\ f(1,1,0) = (1,0),\ f(1,1,1) = (1,1).$$

2. Calculer $f(x, y, z)$, où x, y, z sont trois réels.

Exercice 4.
On note $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme

$$u : E \to E,\ y \mapsto y'.$$

1. Déterminer u^2.
2. Prouver que $F = \left\{y \in E \mid u^2(y) = y\right\}$ est un sev de $\mathbb{R}^2$ et en déterminer une base.

Exercice 5.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u(x) = 2x$ pour tout $x \in E$. Exprimer $u^n(x)$ en fonction de n et de x pour n entier naturel et $x \in E$.

Exercice 6.
Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$.

1. Prouver que p est linéaire et calculer p^2.
2. a. Prouver que $F = \left\{v \in \mathbb{R}^2 \mid p(v) = v\right\}$ est un sev de $\mathbb{R}^2$ et en déterminer une base.
   b. Prouver que $G = \left\{v \in \mathbb{R}^2 \mid p(v) = 0_{\mathbb{R}^2}\right\}$ est un sev de $\mathbb{R}^2$ et en déterminer une base.
3. Interpréter géométriquement.

Exercice 7.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u^2 - 2u = \mathrm{Id}_E$. Déterminer $v \in \mathscr{L}(E)$ telle que $u \circ v = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 8.
Soit n un entier naturel et $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X], P \mapsto P(X) - P(0)$.

1. Prouver que u est linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 9.
Soit $\Phi : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ l'application linéaire définie par

$$\Phi(x, y, z) = (x+y, y+z, z+x).$$

Déterminer le noyau et l'image de Φ.

Exercice 10.
En utilisant le noyau d'une application linéaire, prouver que $F = \left\{(x, y, z) \mid x + 2y - 3z = 0\right\}$ est un sev de $E = \mathbb{R}^3$.

Exercice 11.
Soit $g : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ P \mapsto P(X) + (1-X)P'(X)$.

1. Prouver que g est linéaire.
2. Déterminer le noyau de g.

Exercice 12.
Soient f, g deux endomorphismes de E.

1. Comparer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.
2. Comparer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}\left(f^2\right)$.
3. Comparer $\mathrm{Ker}(f+g)$ et $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 13.
Démontrer que si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont deux sev de E et F respectivement.

Exercice 14 ( ).
Démontrer le point 2 de la proposition 5 du cours.

Exercice 15 ( ).
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u^2 = u$.

Prouver que $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$.

Indication : tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = x - u(x) + u(x)$.

Exercice 16 ( ).
Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3,\ P \mapsto \big(P(0), P'(0), P''(0)\big)$.
Prouver que f est une application linéaire bijective et déterminer l'expression de u^{-1}.

Exercice 17 ( ).
Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.

1. Prouver que u est un automorphisme.
2. Déterminer l'expression de u^{-1}.

Exercice 18 ( ).
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible et $u : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ X \mapsto AX$.
Prouver que u est un automorphisme et déterminer l'expression de u^{-1}.

Exercice 19.
On note $G = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on définit

$$u : G \to G,\ y \mapsto y'' - 3y' + 2y.$$

1. Prouver que u est linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(u)$.
3. Exprimer les solutions de l'équation $(E) : y'' - 3y' + 2y = 6$ en fonction de $\operatorname{Ker}(u)$.

Exercice 20.
Déterminer un isomorphisme $u : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$.

Exercice 21.
L'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$f(1,0,0) = X - 3,\ f(0,1,0) = 2,\ f(0,0,1) = X^2 - X + 5$$

est-elle bijective ?

Exercice 22 ( ).
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$ et on définit un endomorphisme u de E par les images des vecteurs de $\mathscr{B}$:

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3,\ u(e_2) = 3e_2,\ u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

Déterminer $\operatorname{Ker}(u)$, puis le rang de u.

Exercice 23 ( ).
On suppose que $\dim(E) = 3$. Existe-t-il $u \in \mathscr{L}(E)$ telle que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u)$?

Exercice 24 ( ).
On choisit quatre réels $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ et on définit

$$u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4,\ P \mapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3), P(a_4)).$$

1. Prouver que u est linéaire.
2. Prouver que u est bijective.
3. Déterminer explicitement un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant

$$P(0) = 2,\ P(1) = -3\ , P(3) = 0,\ P(4) = 1.$$

Exercice 25 ( ).
On note E l'ensemble des suites de nombres réels. On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ qui, à toute suite $u = (u_0, u_1, u_2, \ldots)$, associe la suite $f(u) = (u_1, u_2, u_3, \ldots)$.

1. Prouver que f est linéaire.
2. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f.

Exercice 26 ( ).
Existe-t-il une application linéaire $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dont le noyau est $H = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = y = z = t\big\}$?

Exercice 27 ( ).
Soit n un entier naturel et $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Prouver que u est linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(u)$.
3. En déduire le rang de u, puis $\operatorname{Im}(u)$.

Exercice 28 ( ).
Soient u, v deux endomorphismes de E, que l'on suppose de dimension finie.

Prouver que $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg} v))$.

Exercice 29 ( ).
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_E = 0$. On note $F = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker}\big(f - 2\mathrm{Id}_E\big)$.

1. Prouver que $F \cap G = \{0_E\}$.
2. Soit $x \in E$. En écrivant $x = \big(2x - f(x)\big) + \big(-x + f(x)\big)$, prouver que $E = F \oplus G$.
3. Soit $x \in E$. On l'écrit $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in G$. Prouver que pour tout entier naturel n :

$$f^n(x) = y + 2^n z.$$

Exercice 30 (CCINP 2022).
Le but de cet exercice est l'étude de l'application Φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ avec n un entier fixé non nul par :

$$\Phi : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$$

afin de permettre le calcul de somme d'entiers.
On note pour tout k entier non nul Φ^k la composée k-ième de l'application Φ.

1. **a.** Donner la formule du binôme de Newton.

   b. Soit k un entier non nul. Montrer que :
   $$(X+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i.$$

   c. On considère les polynômes $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X^2$ et $P_3(X) = X^3$.
   Montrer que :
   $\Phi(P_0)(X) = 0$,
   $\Phi(P_1)(X) = 1$,
   $\Phi(P_2)(X) = 2X + 1$,
   $\Phi(P_3)(X) = 3X^2 + 3X + 1$.

   d. Calculer $\Phi^2(P_2)(X)$ et $\Phi^3(P_2)(X)$.

   e. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   f. Montrer que pour tout polynôme non constant P de degré k avec k un entier non nul, $\Phi(P)$ est un polynôme de degré $k-1$.

   g. Calculer le noyau de Φ.

   h. Donner l'image de Φ.

   i. Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, tels que $\Phi(Q) = P$. Montrer que :
   $$\sum_{i=0}^{n} P(i) = Q(n+1) - Q(0).$$

2. **a.** Considérons la famille $(H_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ où pour chaque i non nul,
   $$H_i(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-i+1)}{i!} = \frac{\prod_{k=0}^{i-1}(X-k)}{i!}$$
   et $H_0(X) = P_0$ le polynôme constant égal à 1.

   Prouver que $(H_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   b. Montrer que pour tout i entier entre 1 et n, $H_i(0) = 0$.

   c. Montrer que pour tout i entier entre 1 et n, $\Phi(H_i) = H_{i-1}$.

   d. Montrer que pour tout i entier entre 1 et n, $\Phi^i(H_i) = 1$.

   e. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(X)$, avec a_k réel pour tout k entier entre 0 et n.

   Montrer que $P(0) = a_0$ et que pour tout l, un entier fixé entre 1 et n, $a_l = \Phi^l(P)(0)$.

   f. En déduire que tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ peut s'écrire (de manière unique) sous la forme :
   $$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \Phi^k(P)(0) H_k(X).$$

   g. Vérifier que $X = 0 \times H_0(X) + 1 \times H_1(X)$.

   h. Déduire à l'aide de 1.(i), de 2.(c) et de 2.(g) que :
   $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

   i. Vérifier que $X^2 = 0 \times H_0(X) + 1 \times H_1(X) + 2 \times H_2(X)$.

   j. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   k. Proposer en Python une fonction qui renvoie la valeur de la somme des cubes des n premiers entiers prenant en argument un entier naturel n passé en paramètre.