Chapitre 18 : Intégration

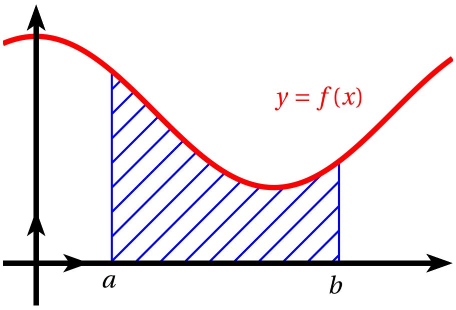
Dans tout le chapitre, $[a,b]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$.

I. Intégrale d'une fonction continue

Définition 1

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue positive. L'aire (exprimée en unités d'aire) de la portion de plan située entre l'axe des abscisses, la courbe de la fonction f et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est appelée intégrale de f entre a et b et notée

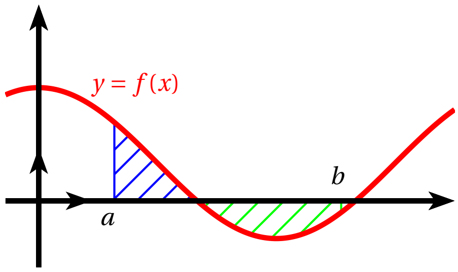
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$



Définition 2

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. L'intégrale de f entre a et b, encore notée $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, est la différence entre :

- la somme des aires des zones situées au dessus de l'axe des abscisses et entre cet axe et la courbe ;
- la somme des aires des zones situées en dessous de l'axe des abscisses et entre cet axe et la courbe.



Remarque. On note également $\int_a^b f$.

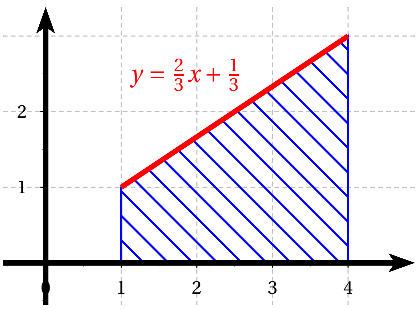
Exercices

Exercices 1 et 2

Les exemples suivants sont discutés en exercices.

Exemple 1

$$\int_1^4 \left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{(B+b)\times h}{2}=\frac{(3+1)\times 3}{2}=6.$$



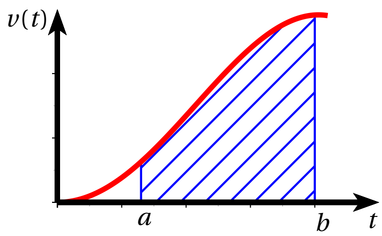
$\begin{pmatrix}\text{aire d'un}\\ \text{trapèze}\end{pmatrix}$

Exemple 2

Si $v(t)$ donne la vitesse d'une voiture au temps t, alors

$$\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$$

est la distance totale parcourue entre les temps $t=a$ et $t=b$.



La vitesse moyenne de la voiture est alors

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b v(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque (Intégrale d'une fonction constante). On rappelle que si c est une constante :

$$\int_a^b c\mathrm{d}x = c(b-a).$$

Remarque (Inversion des bornes). On pose

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

II. Calcul intégral

Théorème 1 (théorème fondamental de l'analyse)

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque. Lorsque les bornes sont « à l'envers », la formule devient : $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$.

Les tableaux dans la proposition ci-dessous recensent les primitives usuelles.

Proposition 1 (C désigne une constante réelle)

Primitives du lycée	
Fonctions	Primitives
e^{ax} $(a \neq 0)$	$\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

Nouvelles fonctions usuelles	
Fonctions	Primitives
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + C$

Opérations sur les primitives (u et v sont des fonctions)	
Fonctions	Primitives
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert) + C$
$u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + C$
$u'u^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} + C$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan u + C$
$u' \times v' \circ u$	$v \circ u + C$

Remarques.

- On prendra garde aux ensembles de définition.
- Le cas de $x \mapsto x^\alpha$ contient bien sûr les fonctions de la forme $x \mapsto x^n$, avec $n \in \mathbb{N}$; mais aussi par exemple $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}} = x^{-1/2}$, dont les primitives sont les $x \mapsto 2x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$.
- Les quatre 1res lignes du tableau de droite sont des cas particuliers (les plus utiles) de la 5e ligne.

Exemple 3

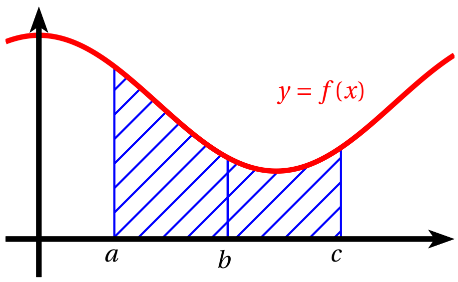
On calcule $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$. On reconnaît la formule $\frac{u'}{1+u^2}$, avec $u(x) = \sin x$, donc

$$I = [\arctan(\sin x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \arctan\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) - \arctan(\sin 0) = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Proposition 2 (relation de Chasles)

Pour toute fonction f continue sur un intervalle I, pour tous réels a, b, c dans I :

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x.$$



On a déjà énoncé et utilisé la proposition suivante dans le chapitre 3.

Proposition 3 (linéarité de l'intégrale)

Pour toutes fonctions f, g continues sur $[a,b]$, pour tous réels α, β :

$$\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Exercices

Exercices 3 à 7

Si f est positive sur $[a,b]$, le nombre $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est une aire. Il est donc positif :

Proposition 4 (positivité de l'intégrale)

Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a,b]$. Dans ce cas

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0.$$

Proposition 5 (croissance de l'intégrale)

Soient f, g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$. Si $f(x)\leq g(x)$ pour tout $x\in[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Proposition 6 (inégalité triangulaire)

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue, alors

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leq\int_a^b\big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 4

Soient $x<y$ deux réels. On a

$$\int_x^y\cos t\,\mathrm{d}t=[\sin t]_x^y=\sin y-\sin x,$$

donc

$$\big|\sin y-\sin x\big|=\left|\int_x^y\cos t\,\mathrm{d}t\right|\leq\int_x^y|\cos t|\,\mathrm{d}t.$$

Or $|\cos t|\leq 1$ pour tout réel t, donc

$$\int_x^y|\cos t|\,\mathrm{d}t\leq\int_x^y 1\,\mathrm{d}t=1\big(y-x\big)=y-x=|y-x|.$$

Conclusion :

$$\big|\sin y-\sin x\big|\leq|y-x|.$$

Remarque. On peut aussi démontrer cette inégalité en utilisant l'IAF.

Exercices

Exercices 8 à 10

Théorème 2 (intégration par parties)

Soient u, v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[a,b]$. Dans ce cas :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

Exemple 5

On calcule $\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x$.

Pour cela, on écrit $\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}1\times\ln x\mathrm{d}x$ et on intègre par parties : on pose

$$\begin{aligned} u'(x)&=1 & v(x)&=\ln x\\ u(x)&=x & v'(x)&=\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Chacune des fonctions u et v est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,\mathrm{e}]$, donc :

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\underbrace{1}_{u'(x)}\times\underbrace{\ln x}_{v(x)}\mathrm{d}x&=\Big[\underbrace{x}_{u(x)}\times\underbrace{\ln x}_{v(x)}\Big]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\underbrace{x}_{u(x)}\times\underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\mathrm{d}x\\ &=\mathrm{e}\ln\mathrm{e}-1\ln 1-\int_1^{\mathrm{e}}1\mathrm{d}x\\ &=\underbrace{\mathrm{e}\times 1-1\times 0}_{=\mathrm{e}}-[x]_1^{\mathrm{e}}\\ &=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)\\ &=1\end{aligned}$$

Exercices

Exercices 11 à 13

Théorème 3 (changement de variable)

Si φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors pour tous a, b dans I :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Remarques.

- On peut très bien avoir $a \geq b$.
- En pratique, on pose $x=\varphi(t)$ et on dérive « à la physicienne » :

$$\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 6

On calcule

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

On pose

$$x = \sin t \qquad \mathrm{d}x = \cos t \mathrm{d}t$$

et on complète le tableau de valeurs (il faut deviner les valeurs à la 2e ligne – il y a plusieurs possibilités pour t) :

$x = \sin t$	0	1
t	0	$\frac{\pi}{2}$

Le théorème de changement de variable donne[a] :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t \mathrm{d}t.$$

Or $\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$, lorsque $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \times \cos t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, \mathrm{d}t.$$

Pour finir, $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$ pour tout réel t, donc $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$. On a donc

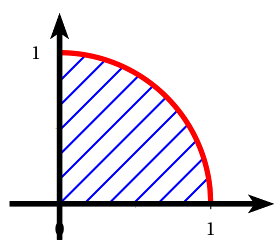
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2t)\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{4}\sin(2\times 0)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

a. Formellement, on a posé $\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$, $t \mapsto \sin t$.

Remarque.

La réponse est évidente si l'on fait une figure : $y = \sqrt{1-x^2}$ $(x \in [0,1])$ est l'équation de la partie en haut à droite du cercle trigonométrique. L'intégrale I représente donc le quart de l'aire du disque de centre O de rayon 1 :

$$I = \frac{1}{4}\times\pi\times 1^2 = \frac{\pi}{4}.$$



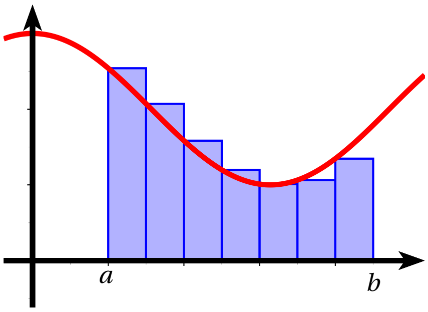
Exercices

Exercices 14 à 16

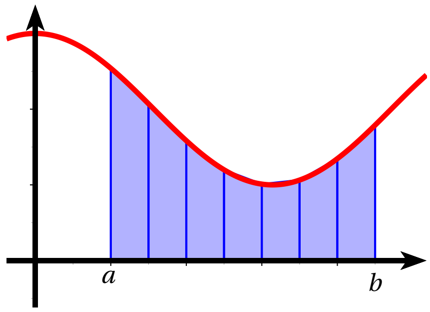
III. Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Lorsqu'on ne parvient pas à trouver de primitive de f, on peut approcher $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ par différents algorithmes. On utilise par exemple :

Exemple 7 (méthode des rectangles)



Exemple 8 (méthode des trapèzes)



Exercices

Exercices 17 à 19

On peut s'attendre à ce que l'approximation de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ par la méthode des rectangles soit d'autant meilleure que la largeur desdits rectangles est petite ; et même qu'à la limite, lorsque cette largeur tend vers 0, la somme de leurs aires tende vers la valeur de l'intégrale. Dans l'exercice 17, on a vu que c'était vrai pour la fonction $x \mapsto x^2$, sur l'intervalle $[0,1]$. Le résultat est en fait valable dans un cadre beaucoup plus général :

Théorème 4 (sommes de Riemann)

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, alors :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

L'expression de gauche ci-dessus est appelée somme de Riemann pour f sur l'intervalle $[a,b]$.

Exemple 9

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$.

On réécrit de façon astucieuse, pour faire apparaître une somme de Riemann :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^2}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2+k^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

Il s'agit d'une somme de Riemann, pour la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, sur l'intervalle $[0,1]$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, donc

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Exercices

Exercice 20

IV. Fonction définie par une intégrale

Théorème 5

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$. On définit

$$F : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

La fonction F est l'unique primitive de f s'annulant en x_0. Autrement dit :

— $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$;

— $F(x_0) = 0$.

Remarque.
Toute fonction continue sur un intervalle I y admet donc une primitive !

Exemple 10

La fonction $f : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto \frac{1}{1+x^4}$.

Exercices

Exercices 21 à 26

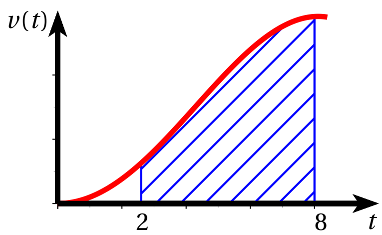
V. Exercices

Exercice 1.
Sans utiliser de primitive, calculer $\int_{-2}^{4}(-0,5x+1)\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^4\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 2.

1. Si $v(t)$ donne la vitesse (en m/s) d'une voiture au temps t (en s), que représente le nombre

$$\int_2^8 v(t)\mathrm{d}t\,?$$



2. Exprimer la vitesse moyenne de la voiture entre les temps $t = 2$ et $t = 8$ à l'aide d'une intégrale.

Exercice 3 (🏛).
Calculer les intégrales :

1. $I = \int_1^2 \frac{2}{t}\mathrm{d}t$.
2. $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan t\,\mathrm{d}t$.
3. $K = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.
4. $L = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.
5. $M = \int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.
6. $N = \int_{-1}^{1} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.
7. $O = \int_1^8 x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x$.

Exercice 4 (🏛).
Déterminer des primitives des fonctions.

1. $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ sur $]0,+\infty[$.
2. $x \mapsto \frac{x-1}{1+x^2}$.
3. $x \mapsto x\sqrt{x}$ sur $]0,+\infty[$.
4. $t \mapsto t\sin\left(t^2\right)$.

Exercice 5 (🏛).
Calculer les intégrales :

1. $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+1}\mathrm{d}t$.
2. $J = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
3. $K = \int_0^{\pi} \sin^3 t\,\mathrm{d}t$.
4. $L = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x$.
5. $M = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\mathrm{d}x$.
6. $N = \int_0^1 |3x-1|\mathrm{d}x$.

Exercice 6.
Soit $0 \leq a \leq 1$. Prouver que

$$\int_0^1 \min(x,a)\mathrm{d}x = a - \frac{1}{2}a^2.$$

Exercice 7 (🏛).

1. Déterminer deux réels a, b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$:
$$\frac{2x-1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$
2. En déduire les primitives de
$$x \mapsto \frac{2x-1}{x(x+1)}.$$
3. Déterminer de même les primitives de
$$x \mapsto \frac{-3x+4}{(2x-1)(x+2)}.$$

Exercice 8 ().

1. Prouver que pour tout réel t :
$$0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1.$$

2. En déduire que pour tous réels $x < y$:
$$0 \leq \arctan y - \arctan x \leq y - x.$$

Exercice 9 ().

Pour tout entier naturel n, on définit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x$.

1. Justifier l'encadrement, pour tout entier naturel n, pour tout réel $0 \leq x \leq 1$:
$$0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n.$$
En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Prouver que pour tout entier naturel k :
$$I_k + I_{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

3. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ pour tout entier naturel n.
En utilisant la question précédente, prouver que $S_n = I_0 + (-1)^n I_{n+1}$.

4. Calculer I_0 et en déduire la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10 ().

1. Prouver que pour tout entier $k \geq 1$, pour tout réel $k \leq t \leq k+1$:
$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$
En déduire que
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout entier $n \geq 1$. Prouver que
$$\ln(n+1) \leq S_n,$$
puis déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 11 ().

Calculer les intégrales à l'aide d'une (ou plusieurs) intégration(s) par parties.

1. $I = \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$.
2. $J = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \mathrm{d}x$.
3. $K = \int_0^1 \arctan x \mathrm{d}x$.
4. $L = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^t \sin t \mathrm{d}t$.

Exercice 12 ().

Pour tout entier naturel n, on pose
$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x} \mathrm{d}x.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, prouver que pour tout entier naturel n :
$$I_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} + I_n.$$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$I_n = \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

3. Prouver enfin que $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 13 (intégrales de Wallis).

Pour tout entier naturel n, on pose
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En intégrant par parties I_{n+2} (poser $v(x) = \sin^{n+1} x$ et $u'(x) = \sin x$), prouver que
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

3. En déduire I_2, I_4 et I_6. Généraliser à I_{2n}, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 ().

Calculer les intégrales à l'aide d'un changement de variable.

1. $I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1} \mathrm{d}x$.
2. $J = \int_0^{\ln 3} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \mathrm{d}x$.
3. $K = \int_0^2 \frac{1}{4+x^2} \mathrm{d}x$.

Exercice 15 ().

À l'aide d'un changement de variable, justifier l'égalité
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u \mathrm{d}u,$$
puis déterminer la valeur de chaque intégrale.

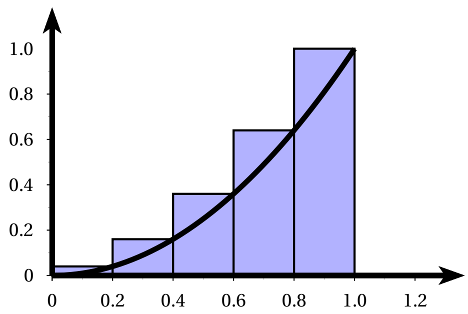
Exercice 16 ().

1. Prouver que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

2. En déduire la valeur de
$$I = \int_0^1 \frac{1}{u + \sqrt{1-u^2}} \mathrm{d}u.$$

Exercice 17.

On a tracé ci-dessous la courbe de la fonction $x \mapsto x^2$.



1. Prouver que la somme S_5 des aires des rectangles dessinés est égale à $0,44$.
2. Généralisation : on coupe l'intervalle $[0,1]$ en n intervalles de même amplitude et on construit n rectangles comme ci-dessus.

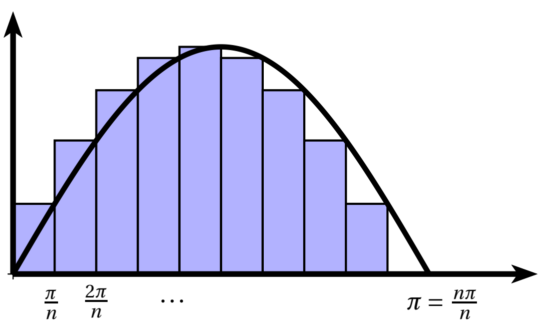
   Compléter le code Python qui calcule la somme S_n des aires des rectangles.

```
def aire(n):
        Somme=0
        for k in range(...):
                Somme=...
        return Somme
```

   Donner la valeur de $S_{1\,000}$ obtenue avec ce code.
3. Prouver que la somme S_n des aires des rectangles est égale à
$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 18.

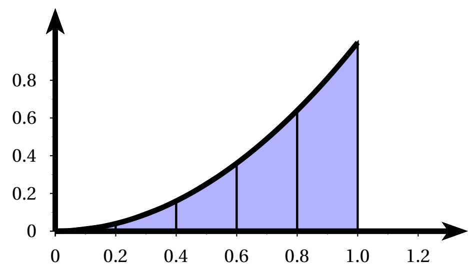
On utilise la même méthode des rectangles que dans l'exercice précédent, mais cette fois pour la fonction $x \mapsto \sin x$, sur l'intervalle $[0,\pi]$.



1. Écrire un code Python qui calcule la somme S_n des aires des rectangles. Il faudra charger le module **math**, pour avoir la fonction sin et le nombre π.
2. Calculer $S_{1\,000}$ et comparer à $\int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$.

Exercice 19.

1. On reprend l'exercice 17. Modifier le code pour qu'il calcule la somme T_n des aires de n trapèzes comme sur la figure ci-dessous.
2. Donner la valeur de $T_{1\,000}$ obtenue avec ce code.



Exercice 20 (🏛 🏅).

En utilisant des sommes de Riemann, calculer les limites ou déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de :

1. $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$.
2. $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3. $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2+k^2}$.
4. $V_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt{n+k}$.

Exercice 21 (🏛).

Construire le tableau de variations de $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 22 (🏛).

À l'aide d'une IPP, déterminer la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1.

Exercice 23 (🏛).

À l'aide d'une IPP, déterminer la primitive de la fonction arcsin qui s'annule en 0.

Exercice 24.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive telle que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$.

On pose $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ pour $x \in [a,b]$.

1. Étudier les variations de F et calculer $F(a)$ et $F(b)$.
2. En déduire que f est la fonction nulle.

Exercice 25 (🏛 🏅).

Soit $F :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$.

1. Prouver que pour tout $x > 0$:
$$\mathrm{e}^{-2x}\ln 2 \leq F(x) \leq \mathrm{e}^{-x}\ln 2.$$
2. En déduire la limite de F en $+\infty$ et en 0.

Exercice 26 (🏅).

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer la dérivée de $G : x \mapsto \int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t$.